



## 第二章

## 一元二次函数、方程和不等式

### 2.1 等式性质与不等式性质



#### 对点上分

**1. D** 【解析】由题意可知, 另一段绳子的长度为  $(5-x)$  m.

因为两段绳子长度之差不小于 1 m, 所以

$$\begin{cases} |x - (5-x)| \geq 1, \\ 0 < x < 5, \end{cases} \text{ 化简得 } \begin{cases} |2x-5| \geq 1, \\ 0 < x < 5. \end{cases} \text{ 故}$$

选 D.

**2. D** 【解析】由题意知, 该同学所跑的路程为  $x$  米, 若  $x$  最小, 则应满足  $\frac{100-x}{3} \leq$

$3x$ , 解得  $x \geq 10$ ; 若  $x$  最大, 则应满足  $\frac{100-x}{3} \geq \frac{x}{3}$ , 解得  $x \leq 50$ .

综上可得,  $x$  的取值范围是  $10 \leq x \leq 50$ . 故选 D.

**3. C** 【解析】依题意可设买大竹子  $x$  根, 每根单价为  $m$  钱, 购买小竹子  $(78-x)$  根, 每根单价为  $(m-1)$  钱, 所以  $576 = mx + (78-x)(m-1)$ , 即  $78m + x = 654$ , 即  $x = 6(109-13m)$ .

因为  $0 \leq x \leq 78$ ,

$$\text{所以 } \begin{cases} 109-13m \geq 0, \\ 6(109-13m) \leq 78, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \frac{96}{13} \leq m \leq \frac{109}{13}, \text{ 结合选项取 } m=8, x=$$

30, 此时买大竹子 30 根, 每根 8 钱. 故选 C.

$$\mathbf{4. } 8(x+19) > 2\,200(x>0) \quad \frac{8x}{x-12} > 9(x>12)$$

【解析】由题意知,  $8(x+19) > 2\,200(x>0)$ . 如果每天行驶的路程比原来少 12 km, 那么原来行驶 8 天的路程就要用

9 天多, 即  $\frac{8x}{x-12} > 9(x>12)$ .

**5. A** 【解析】由  $c < d$ , 得  $-c > -d$ , 又  $a > b$ , 则由不等式的同向可加性得  $a-c > b-d$ , 所以充分性成立;

由  $a-c > b-d$ , 得  $a-b > c-d$ , 且  $a > b$ , 此时无法确定  $c-d$  的符号, 必要性不成立. 所以



“ $c < d$ ”是“ $a - c > b - d$ ”的充分不必要条件.

故选 A.

**6. C** 【解析】对于 A, 当  $c < 0$  时, 由  $\frac{a}{c} >$

$\frac{b}{c}$  及不等式性质得  $a < b$ , 故 A 错误;

对于 B, 若  $ac^2 \geq bc^2$ , 当  $c = 0$  时,  $a, b$  大小关系无法确定, 故 B 错误;

对于 C, 若  $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ , 则  $c \neq 0$ , 所以  $c^2 > 0$ , 不等式两边同乘  $c^2$ , 得  $ac < bc$ , 故 C 正确;

对于 D, 取  $a = -2, b = -1$ , 满足  $a < b < 0$ , 但  $a^2 > b^2$ , 故 D 错误. 故选 C.

**7. BCD** 【解析】对于 A, 令  $a = 2, b = \frac{1}{2}$ , 则

$a + \frac{1}{a} = b + \frac{1}{b}$ , 故 A 错误;

对于 B, 因为  $m > n > 0$ ,  $\frac{m+1}{n+1} - \frac{m}{n} =$

$\frac{n-m}{n(n+1)} < 0$ , 所以  $\frac{m+1}{n+1} < \frac{m}{n}$ , 故 B 正确;

对于 C, 由  $c > a > b > 0$ , 得  $-a < -b < 0$ , 则

$0 < c - a < c - b$ , 每项同乘  $\frac{1}{(c-a)(c-b)}$ , 得

$0 < \frac{1}{c-b} < \frac{1}{c-a}$ , 又  $a > b > 0$ , 所以  $\frac{a}{c-a} > \frac{b}{c-b}$ , 故

C 正确;

对于 D, 若  $a \geq b > -1$ , 则  $a+1 \geq b+1 > 0$ , 所

以  $a(1+b) = a+ab \geq b+ab = b(1+a)$ , 所以

$\frac{a}{1+a} \geq \frac{b}{1+b}$ , 故 D 正确. 故选 BCD.

**8. 3** 【解析】(1) 若  $ab > 0, bc > ad$ , 则  $\frac{c}{a} >$

$\frac{d}{b}$ . 推理如下: 因为  $ab > 0, bc > ad$ , 所以不

等式  $bc > ad$  两边同时除以  $ab$ , 得  $\frac{bc}{ab} > \frac{ad}{ab}$ ,

即  $\frac{c}{a} > \frac{d}{b}$ , 所以该命题为真命题.

(2) 若  $ab > 0, \frac{c}{a} > \frac{d}{b}$ , 则  $bc > ad$ . 推理如

下: 因为  $\frac{c}{a} > \frac{d}{b}, ab > 0$ , 所以  $\frac{c}{a} \cdot ab >$

$\frac{d}{b} \cdot ab$ , 即  $bc > ad$ , 所以该命题为真命题.

(3) 若  $bc > ad, \frac{c}{a} > \frac{d}{b}$ , 则  $ab > 0$ .

推理如下:



因为  $\frac{c}{a} > \frac{d}{b}$ , 所以  $\frac{c}{a} - \frac{d}{b} = \frac{bc-ad}{ab} > 0$ .

因为  $bc > ad$ , 所以  $bc-ad > 0$ , 所以  $ab > 0$ , 所以该命题为真命题.

综上, 组成的 3 个命题都是真命题.

## 9. A



### 攻略上分

要比较整式  $M$  和  $N$  的大小, 可用通法攻略 6 中的作差法求解.

【解析】因为  $M-N = x^2 + y^2 + 1 - 2x - 2y + 2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 + 1 > 0$ , 所以  $M > N$ . 故选 A.

## 10. D



### 攻略上分

本题需要比较代数式的大小, 可用通法攻略 6 中的作差法比较大小, 也可以通过特值法来快速求解.

【解析】(作差法) 因为  $a < b < 0$ , 所以  $a+b < 0, a-b < 0, ab > 0, b-a > 0$ .

对于 A, 因为  $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} > 0$ , 所以  $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ , 故 A 成立;

对于 B, 因为  $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) > 0$ , 所以  $a^2 > b^2$ , 故 B 成立;

对于 C, 因为  $|a| - |b| = -a + b > 0$ , 所以  $|a| > |b|$ , 故 C 成立;

对于 D,  $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2}$ , 结合 B 选项,

$b^2 - a^2 < 0$ , 又因为  $a^2 b^2 > 0$ , 所以  $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} =$

$\frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2} < 0$ , 所以  $\frac{1}{a^2} < \frac{1}{b^2}$ , 故 D 不成立. 故

选 D.

### 快解

(特值法) 取  $a = -2, b = -1$ , 则

$$\frac{1}{a} = -\frac{1}{2} > \frac{1}{b} = -1, a^2 = 4 > b^2 = 1, |a| =$$

$$2 > |b| = 1, \frac{1}{a^2} = \frac{1}{4} < \frac{1}{b^2} = 1, \text{ 故选 D.}$$

## 11. C



### 攻略上分

$P, Q$  都是两个根式的和, 并且各自的被开方数之和相等, 所以利用通法攻略 6 中的平方法求解.

【解析】 $\because P = \sqrt{a} + \sqrt{a+5}, Q = \sqrt{a+2} +$



$$\sqrt{a+3} (a \geq 0), \therefore P > 0, Q > 0,$$

$$\therefore P^2 = 2a + 5 + 2\sqrt{a(a+5)} = 2a + 5 + 2\sqrt{a^2 + 5a},$$

$$Q^2 = 2a + 5 + 2\sqrt{(a+2)(a+3)} = 2a + 5 + 2\sqrt{a^2 + 5a + 6}.$$

$$\because 0 \leq a^2 + 5a < a^2 + 5a + 6, \therefore \sqrt{a^2 + 5a} < \sqrt{a^2 + 5a + 6}, \therefore P^2 < Q^2, \therefore P < Q. \text{ 故选 C.}$$

## 12. &gt;



## 攻略上分

虽然  $a, b$  都含有根式, 但是和第 11 题不同, 通法攻略 6 中提到的分母有理化的变形技巧适用该题, 结合作商法、平方法比较大, 进而解题.

$$\begin{aligned} \text{【解析】(作商法)} \quad \frac{a}{b} &= \frac{\sqrt{7}}{3-\sqrt{3}} = \\ \frac{\sqrt{7}(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})} &= \frac{\sqrt{7}(3+\sqrt{3})}{6} > \frac{2 \times 3}{6} = 1, \end{aligned}$$

即  $\frac{a}{b} > 1$ . 因为  $a > 0, b > 0$ , 所以  $a > b$ .



## 一题多解

(平方法) 由题意知  $a > 0, b > 0, a^2 = 7, b^2 = 12 - 6\sqrt{3}$ , 且  $a^2 - b^2 = 6\sqrt{3} - 5 > 0$ , 所以  $a > b$ .

## 13.



## 攻略上分

(1) 只需根据题设得出不等式并拓展运用即可; (2) 区分两人购买方式的差别, 列出各自的平均价格, 比较大小优先考虑攻略 6 中的作差法.

(1) 【证明】由糖水变甜了得出不等式

$$\frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m} (b > a > 0, m > 0).$$

设  $\triangle ABC$  的三边长分别为  $a, b, c$ , 则有  $a+b > c, a+c > b, b+c > a$ ,

$$\text{由上述不等式可得 } \frac{c}{a+b} < \frac{c+c}{a+b+c}, \frac{a}{b+c} <$$

$$\frac{a+a}{a+b+c}, \frac{b}{a+c} < \frac{b+b}{a+b+c},$$

$$\text{即 } \frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} < \frac{c+c}{a+b+c} + \frac{a+a}{a+b+c} +$$

$$\frac{b+b}{a+b+c} = 2, \text{ 所以 } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

(2) 【解】小东买到的糖的平均价格比较高.



证明如下:对于小东而言,他买到的糖的平均价格为 $\frac{p_1+p_2}{2}$ 元/千克,

对于小华而言,设小华买两种糖的费用均为 $c$ 元,则他买到的糖的总质量为 $\left(\frac{c}{p_1} + \frac{c}{p_2}\right)$ 千克,故小华买到的糖的平均价格为 $\frac{2c}{\frac{c}{p_1} + \frac{c}{p_2}} = \frac{2p_1p_2}{p_1+p_2}$ 元/千克.

因为 $\frac{p_1+p_2}{2} - \frac{2p_1p_2}{p_1+p_2} = \frac{(p_1-p_2)^2}{2(p_1+p_2)} > 0$ ,所以小东买到的糖的平均价格较高.

因为 $\frac{p_1+p_2}{2} - \frac{2p_1p_2}{p_1+p_2} = \frac{(p_1-p_2)^2}{2(p_1+p_2)} > 0$ ,所以小东买到的糖的平均价格较高.

小东买到的糖的平均价格较高.

#### 14. C



#### 攻略上分

题中 $x, y$ 的取值范围之间无制约关系,符合通法攻略7中的类型1.

【解析】因为 $-1 < x < 4, 2 < y < 3$ ,所以 $-3 < 3x < 12, 4 < 2y < 6$ ,所以 $1 < 3x + 2y < 18$ . 故选C.

15. B 【解析】因为 $b < a < -3b$ ,所以 $b < 0$ ,则有 $\frac{1}{b} < 0$ ,又 $b < a < -3b$ ,所以可得 $-3 < \frac{a}{b} < 1$ ,所以 $0 \leq \left| \frac{a}{b} \right| < 3$ . 故选B.

所以 $0 \leq \left| \frac{a}{b} \right| < 3$ . 故选B.

#### 16. D



#### 思路导引

先由题意得

$$\begin{cases} 9 < (a+b)^2 < 16, \\ 1 < (a-b)^2 < 4, \end{cases} \text{进而求得 } 5 < 4ab < 15,$$

即可求解 $2ab$ 的取值范围.

【解析】因为 $\begin{cases} 3 < a+b < 4, \\ 1 < a-b < 2, \end{cases}$

所以 $\begin{cases} 9 < (a+b)^2 < 16, \\ 1 < (a-b)^2 < 4, \end{cases}$

即 $\begin{cases} 9 < a^2 + 2ab + b^2 < 16, \\ 1 < a^2 - 2ab + b^2 < 4, \end{cases}$

所以 $\begin{cases} 9 < a^2 + 2ab + b^2 < 16, \text{①} \\ -4 < -a^2 + 2ab - b^2 < -1, \text{②} \end{cases}$

由①+②可得 $5 < 4ab < 15$ ,所以 $\frac{5}{2} < 2ab < \frac{15}{2}$ .

$2ab < \frac{15}{2}$ .

#### 17. ACD



#### 攻略上分

本题符合通法攻略7中的类型2,求 $x, y$ 的范围是待定系数法的应用,判断C,D时不能直接利用已求的 $x, y$ 的范围,依然需要利用待定系数法求解.



【解析】对于 A,  $1+3 \leq (x-y) + (3x+y) \leq 5+11$ , 即  $4 \leq 4x \leq 16$ , 解得  $1 \leq x \leq 4$ , A 正确.

对于 B,  $\because 1 \leq x-y \leq 5, \therefore -5 \leq y-x \leq -1$ ,  
 $\therefore -15 \leq 3(y-x) \leq -3$ . 又  $3 \leq 3x+y \leq 11$ ,  
 $\therefore -15+3 \leq 3(y-x) + (3x+y) \leq -3+11$ ,  
 即  $-12 \leq 4y \leq 8$ , 解得  $-3 \leq y \leq 2$ , B 错误.

对于 C,  $\because -5 \leq y-x \leq -1, 3 \leq 3x+y \leq 11$ ,  
 $\therefore -5+3 \leq (y-x) + (3x+y) \leq -1+11$ , 即  
 $-2 \leq 2x+2y \leq 10$ , 解得  $-1 \leq x+y \leq 5$ , C 正确.

对于 D,  $\because -\frac{5}{4} \leq -\frac{1}{4}(x-y) \leq -\frac{1}{4}$ ,  
 $\frac{9}{4} \leq \frac{3}{4}(3x+y) \leq \frac{33}{4}, \therefore -\frac{5}{4} + \frac{9}{4} \leq$   
 $-\frac{1}{4}(x-y) + \frac{3}{4}(3x+y) \leq \frac{33}{4} - \frac{1}{4},$   
 $\therefore 1 \leq 2x+y \leq 8$ , D 正确.

故选 ACD.

18.



攻略上分

(1) 比较整式大小, 可以利用通法攻略 6 中的作差法求解; (2) 由  $-3 < b < 2$ , 得  $-2 < -b < 3$ , 注意  $a, b$  间也有大小关系限制; (3) 符合通法攻略 7 的类型 2, 首先设  $3a - 2b = m(a+b) + n(a-b) = (m+n)a + (m-n)b$ , 求出  $m, n$  的值, 再让两个不等式相加可得结果.

【解】(1)  $(px+qy)^2 - (px^2+qy^2) = p(p-1)x^2 + q(q-1)y^2 + 2pqxy$ .

因为  $p+q=1$ , 所以  $p-1=-q, q-1=-p$ , 所以  
 $(px+qy)^2 - (px^2+qy^2) = -pq(x^2+y^2-2xy) = -pq(x-y)^2$ .

因为  $p, q$  都为正数, 所以  $-pq(x-y)^2 \leq 0$ , 因此  $(px+qy)^2 \leq px^2+qy^2$ , 当且仅当  $x=y$  时等号成立.

(2) 因为  $-3 < a < b < 2$ , 即  $-3 < a < 2, -3 < b < 2$ ,

所以  $-2 < -b < 3$ , 所以  $-5 < a-b < 5$ .

又  $a < b$ , 所以  $-5 < a-b < 0$ , 即  $a-b$  的取值范围是  $-5 < a-b < 0$ .

(3) 方法一: 设  $3a-2b = m(a+b) + n(a-b) = (m+n)a + (m-n)b$ , 所以

$$\begin{cases} m+n=3, \\ m-n=-2, \end{cases} \text{ 解得 } m=\frac{1}{2}, n=\frac{5}{2}.$$



因为  $1 \leq a+b \leq 5$ ,  $-1 \leq a-b \leq 3$ , 所以

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}(a+b) \leq \frac{5}{2}, -\frac{5}{2} \leq \frac{5}{2}(a-b) \leq \frac{15}{2}.$$

因为  $3a-2b = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{5}{2}(a-b)$ , 所以

$-2 \leq 3a-2b \leq 10$ , 即  $3a-2b$  的取值范围是  $-2 \leq 3a-2b \leq 10$ .

方法二: 设  $m=a+b$ ,  $n=a-b$ , 则  $a = \frac{m+n}{2}$ ,

$b = \frac{m-n}{2}$ , 且  $1 \leq m \leq 5$ ,  $-1 \leq n \leq 3$ , 则

$$-2 \leq 3a-2b = \frac{m+5n}{2} \leq 10, \text{ 即 } 3a-2b \text{ 的取值范围是 } -2 \leq 3a-2b \leq 10.$$

### 易错警示 利用不等式性质求范围时忽略变量关系致错

本题第(2)问的易错点是“忽略变量本身的大小关系”, 求两变量的差的取值范围时, 要注意两变量本身是否具备大小关系, 如此题忽略题干中的不等式中  $a < b$  这一个大关系, 易得到错误结论  $-5 < a-b < 5$ .

本题第(3)问的易错点是“忽略变量间范围的制约关系”, 利用不等式求某个代数式(特别是涉及两个或两个以上未知量的代数式)的取值范围时, 往往需要利用不等式的“同向可加性”, 但是这种转化不是等价变形, 如果解题过程中多次使用这种转化, 就有可能扩大了所求代数式的取值范围. 本题第(3)问题干中每个不等式中  $a, b$  不是相互独立的, 是相互制约的, 即  $b$  随着  $a$  的变化而变化.

## 2.2 基本不等式



### 对点上分

1. B 【解析】选项 A 不满足“取等号时的条件”, 故不正确; 选项 C 不满足“各项必须为正”, 故不正确; 选项 D,  $x + \frac{1}{x}$  最小值为 2, 故不正确. 故选 B.



## 易错警示 忽视基本不等式的使用条件

使用基本不等式时要注意使用条件“一正二定三相等”，不是正数的时候应考虑提出负号或者用配凑等方法转化为正数，符号不定时要分类讨论，如果取等号时的变量值不能取到，那么这个最值就取不到。

**2. ABC** 【解析】对于 A,  $a^2+b^2+1-(a+b) = a^2-a+b^2-b+1 = \left(a-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(b-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} > 0$ , 所以  $a^2+b^2+1 > a+b$ , 故 A 正确;

对于 B, 当  $a < b$  时,  $\sqrt{|a-b|} > 0, \sqrt{a}-\sqrt{b} < 0$ , 所以  $\sqrt{|a-b|} \geq \sqrt{a}-\sqrt{b}$ , 当  $a \geq b$  时,  $(\sqrt{|a-b|} + \sqrt{b})^2 = |a-b| + 2\sqrt{|a-b|b} + b = a-b+2\sqrt{(a-b)b} + b \geq a$ , 即  $\sqrt{|a-b|} \geq \sqrt{a}-\sqrt{b}$ , 当且仅当  $a=b$  时取等号, 故 B 正确;

对于 C, 因为  $a > 0, b > 0$ ,  $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b} \leq$

$\frac{2ab}{2\sqrt{ab}} = \sqrt{ab}$ , 当且仅当  $a=b$  时取等号,

故 C 正确;

对于 D, 因为  $a > 0, b > 0$ , 所以  $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 2 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2 +$

$2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} = 4$ , 所以  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ , 当

且仅当  $a=b$  时取等号, 故 D 错误. 故选 ABC.

## 规律总结 基本不等式延伸, 当 $a > 0$ ,

$b > 0$  时,  $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq$

$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ , 当且仅当  $a=b$  时等号成立.

## 3. D



### 攻略上分

已知和为定值, 求积的最值时可用基本不等式及通法攻略 8 中的配凑法快速求解.

【解析】 $2xy \leq \left(\frac{2x+y}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ , 所以  $xy \leq$





$\frac{1}{8}$ , 当且仅当  $2x=y$ , 即  $x=\frac{1}{4}, y=\frac{1}{2}$  时取

等号. 故选 D.

#### 4. A



#### 攻略上分

要求和的最值, 虽然

$3x$  与  $\frac{4}{x+1}$  的积不为定值, 但是观察差

异发现  $3(x+1)$  与  $\frac{4}{x+1}$  的积为定值, 也

就是完成了通法攻略 8 中的“配凑”.

【解析】因为  $y = 3x + \frac{4}{x+1} = 3(x+1) +$

$$\frac{4}{x+1} - 3 \geq 2\sqrt{3(x+1) \cdot \frac{4}{x+1}} - 3 = 4\sqrt{3} - 3,$$

当且仅当  $3(x+1) = \frac{4}{x+1}$ , 即  $x = \frac{2\sqrt{3}}{3} - 1 > 0$

时, 等号成立. 故选 A.

#### 5. B



#### 攻略上分

本题是通法攻略 8

中典型的二次比一次型, 利用攻略中

的分子的配凑思路来求最值.

【解析】令  $t = a - 1, t > 0$ , 则  $a = t + 1$ , 所以

$$\frac{a^2 - 6a + 6}{1 - a} = -\frac{(t+1)^2 - 6(t+1) + 6}{t} =$$

$$-\frac{t^2 - 4t + 1}{t} = -\left(t + \frac{1}{t}\right) + 4 \leq -2\sqrt{t \cdot \frac{1}{t}} +$$

$4 = 2$ , 当且仅当  $t = 1$ , 即  $a = 2$  时取等号.

故选 B.

#### 6. C



#### 攻略上分

已知等式可以转化

为两分式和为常数“1”的形式, 再利

用攻略 8 和 9 求解.

【解析】 $\because 2x + y = xy, x > 0, y > 0, \therefore \frac{2}{y} +$

$$\frac{1}{x} = 1, \therefore 1 = \frac{2}{y} + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{\frac{2}{xy}} \Rightarrow xy \geq 8$$

(当且仅当  $\frac{2}{y} = \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$ , 即  $x = 2, y = 4$  时

取等号);  $x + 2y = (x + 2y) \left(\frac{2}{y} + \frac{1}{x}\right) =$

$$5 + \frac{2x}{y} + \frac{2y}{x} \geq 5 + 2\sqrt{\frac{2x}{y} \cdot \frac{2y}{x}} = 9 \left(\text{当且仅}$$

当  $\frac{2x}{y} = \frac{2y}{x}$ , 即  $x = 3, y = 3$  时取等号).

综上,  $xy$  和  $x + 2y$  的最小值分别为 8 和

9. 故选 C.

**一题多解**

当  $x > 0, y > 0$  时, 由  $2x + y = xy \geq 2\sqrt{2xy}$ , 解得  $xy \geq 8$ , 当且仅当  $2x = y$ , 即  $x = 2, y = 4$  时取等号.

**7. C****攻略上分**

根据题意分析可知

$y = \frac{2}{3x} - \frac{x}{3}$ , 代入  $4x + 3y$  化简后利用基本不等式及通法攻略 8 中策略即可求解.

**【解析】** 因为正实数  $x, y$  满足  $x^2 + 3xy - 2 = 0$ , 则  $y = \frac{2}{3x} - \frac{x}{3}$ , 则  $4x + 3y = 4x + \frac{2}{x} - x = 3x + \frac{2}{x} \geq 2\sqrt{6}$ , 当且仅当  $3x = \frac{2}{x}$ , 即  $x = \frac{\sqrt{6}}{3}$  时, 等号成立, 所以  $4x + 3y$  的最小值为  $2\sqrt{6}$ . 故选 C.

**8.  $4\sqrt{3}$** **攻略上分**

用基本不等式求和为定值的最值问题时, 可用通法攻略 8 快速求解.

**【解析】** 由题意可知  $p = 6 = \frac{a+b+c}{2} = 4 + \frac{c}{2}$ , 则  $c = 4$ , 所以  $S = \sqrt{6(6-a)(6-b)(6-4)} = 2\sqrt{3} \times \sqrt{(6-a)(6-b)} \leq 2\sqrt{3} \times \frac{(6-a)+(6-b)}{2} = 4\sqrt{3}$ , 当且仅当  $a = b = 4$  时取等号.

**9. 8****攻略上分**

根据通法攻略 8 中的“凑”的策略, 由  $m = (m - 2n) + 2n$ , 得  $m^2 + \frac{2}{n(m-2n)}$  即为  $[(m - 2n) + 2n]^2 + \frac{2}{n(m-2n)}$ , 变形后两次运用基本不等式即可求解.

**【解析】** 因为  $m > 2n > 0$ , 所以  $m - 2n > 0$ ,  $n(m - 2n) > 0$ , 所以  $m^2 + \frac{2}{n(m-2n)} = [(m - 2n) + 2n]^2 + \frac{2}{n(m-2n)} = (m - 2n)^2 + 4n^2 + 4n(m - 2n) + \frac{2}{n(m-2n)} \geq 4n(m - 2n) + 4n(m - 2n) + \frac{2}{n(m-2n)} = 8n(m - 2n) + \frac{2}{n(m-2n)} \geq 2\sqrt{8n(m-2n) \cdot \frac{2}{n(m-2n)}} = 8$ ,



$$\text{当且仅当} \begin{cases} 8n(m-2n) = \frac{2}{n(m-2n)}, \\ m-2n = 2n, \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} m=2, \\ n=\frac{1}{2} \end{cases} \text{时两个不等式中的等号同时成}$$

立, 所以  $m^2 + \frac{2}{n(m-2n)}$  的最小值为 8.

**解题反思**

本题是一道典型的二元双重最值问题, 求解的关键是多次运用基本不等式, 多次运用基本不等式时, 一定要注意等号成立的条件, 看是否同时满足, 另外还要注意不等号的方向, 保持不等号方向的一致性.

**10. (1) 【解】** 结论:  $a^3 + b^3 \geq ab^2 + a^2b$ , 当且仅当  $a=b$  时, 等号成立.

$$\text{证明: } (a^3 + b^3) - (ab^2 + a^2b) = (a^3 - ab^2) + (b^3 - a^2b) = a(a^2 - b^2) + b(b^2 - a^2) = (a+b)(a-b)^2.$$

因为  $a, b$  都是正实数, 所以  $(a+b) \cdot (a-b)^2 \geq 0$ , 当且仅当  $a=b$  时, 等号成立, 所以  $a^3 + b^3 \geq ab^2 + a^2b$ , 当且仅当  $a=b$  时, 等号成立.

**(2) 【证明】** 因为  $a, b$  都是正实数, 且  $a+b=1$ , 所以

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) = \left(1 + \frac{a+b}{a}\right) \left(1 + \frac{a+b}{b}\right) = \left(2 + \frac{b}{a}\right) \left(2 + \frac{a}{b}\right) = 5 + 2 \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) \geq 5 +$$

$$4\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} = 9, \text{ 当且仅当 } a=b=\frac{1}{2} \text{ 时, 等号成立.}$$

**11. 【证明】** (1) 由  $a, b, c, d$  都是正数, 利用基本不等式可知,  $ab+cd \geq 2\sqrt{abcd}$ , 当且仅当  $ab=cd$  时, 等号成立;

$ac+bd \geq 2\sqrt{acbd}$ , 当且仅当  $ac=bd$  时, 等号成立.

所以  $(ab+cd)(ac+bd) \geq 2\sqrt{abcd} \cdot 2\sqrt{acbd} = 4abcd$ , 即有  $(ab+cd)(ac+bd) \geq 4abcd$ , 当且仅当  $a=d, b=c$  时, 等号成立.

(2) 由  $a, b, c$  都是正数, 利用基本不等式可知  $b^2+c^2 \geq 2bc$ , 当且仅当  $b=c$  时, 等号成立;

$c^2+a^2 \geq 2ac$ , 当且仅当  $a=c$  时, 等号成立;



$a^2 + b^2 \geq 2ab$ , 当且仅当  $a = b$  时, 等号成立.

所以  $a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2) \geq a \cdot 2bc + b \cdot 2ca + c \cdot 2ab = 6abc$ , 当且仅当  $a = b = c$  时, 等号成立.

## 12. A



## 思路导引

根据已知将问题化为  $m < 1 + \frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2}$  恒成立, 应用基本不等式求右侧最小值, 即可得参数范围.

【解析】由  $b > 0$ , 得  $m < \frac{1}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} - \frac{2b}{a}$  恒成立. 又由  $a + b = 1$ , 可得  $a^2 + 2ab + b^2 = 1$ , 所以  $m < \frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} - \frac{2b}{a} = 1 + \frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2}$  恒成立, 即  $m < \left(1 + \frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2}\right)_{\min}$ .

提示: 这里运用了“齐次化”的思路, 使得分子、分母的次数相同

$1 + \frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} \geq 1 + 2\sqrt{\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a^2}{b^2}} = 3$ , 当且仅当  $a = b = \frac{1}{2}$  时取等号, 所以  $m < 3$ . 故选 A.

13.  $\frac{2}{3}$  【解析】因为对任意  $x > 0$ , 不等式

$\frac{a}{x} \geq \frac{2}{x^2 - x + 4}$  恒成立, 即不等式  $a \geq$

$\frac{2}{x + \frac{4}{x} - 1}$  恒成立, 所以对任意  $x > 0$ ,

$a \geq \left(\frac{2}{x + \frac{4}{x} - 1}\right)_{\max}$ .

而  $\frac{2}{x + \frac{4}{x} - 1} \leq \frac{2}{2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} - 1} = \frac{2}{3}$ , 当且

仅当  $x = 2$  时取等号, 则  $a \geq \frac{2}{3}$ , 所以

$a$  的最小值是  $\frac{2}{3}$ .

14.  $\{m | m > 25\}$ 

## 思路导引

将  $y = 1 - x$  代入  $S =$

$\frac{4x - y + 5}{xy}$ , 整理得  $S = -5 \times \frac{x + \frac{4}{5}}{x^2 - x}$ , 设

$t = x + \frac{4}{5} > \frac{4}{5}$ , 则可得  $S = -5 \times$

$\frac{1}{t + \frac{36}{25t} - \frac{13}{5}}$ , 利用基本不等式(换元

法)可求得最小值.



【解析】由  $x+y=1$  可得  $y=1-x$ , 所以

$$\frac{4x-y+5}{xy} = \frac{4x-(1-x)+5}{x(1-x)} = -5 \times \frac{x+\frac{4}{5}}{x^2-x}.$$

设  $t=x+\frac{4}{5} > \frac{4}{5}$ , 则  $x=t-\frac{4}{5}$ , 所以  $-5 \times$

$$\frac{x+\frac{4}{5}}{x^2-x} = -5 \times \frac{t}{\left(t-\frac{4}{5}\right)^2 - \left(t-\frac{4}{5}\right)} = -5 \times$$

$$\frac{t}{t^2 - \frac{13}{5}t + \frac{36}{25}} = -5 \times \frac{1}{t + \frac{36}{25t} - \frac{13}{5}}.$$

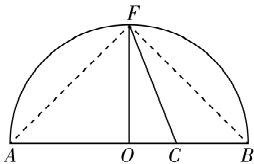
因为  $t + \frac{36}{25t} \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{36}{25t}} = \frac{12}{5}$ , 当且仅当

$t = \frac{6}{5}$ , 即  $x = \frac{2}{5}, y = \frac{3}{5}$  时等号成立, 所

以  $\frac{4x-y+5}{xy}$  的最小值为 25.

因为  $m > \frac{4x-y+5}{xy}$  能成立, 所以实数  $m > 25$ .

15. C 【解析】如图, 连接  $AF, BF$ , 则  $AF \perp BF$ .



由于  $O$  为  $AB$  的中点, 故  $OF = \frac{AB}{2} = \frac{a+b}{2}$ .

又  $OC = OB - CB = \frac{a+b}{2} - b = \frac{a-b}{2}$ ,

所以在  $\text{Rt} \triangle COF$  中,  $FC =$

$$\sqrt{OF^2 + OC^2} = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} =$$

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

由于  $OF \leq FC$ , 故  $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} (a > 0, b > 0)$ . 故选 C.

16. (1) 【证明】设  $BM = x, BF = y$ , 则  $CF = MF = 1 - y$ , 由勾股定理可得  $x^2 + y^2 = (1-y)^2$ , 即  $y = \frac{1-x^2}{2}$ .

由题意可知,  $\triangle AMG \sim \triangle BFM$ ,

设  $\triangle AMG, \triangle BFM$  的周长分别为  $p, p_1$ ,

$$\text{则 } \frac{p}{p_1} = \frac{AM}{BF} = \frac{1-x}{y}.$$

又因为  $p_1 = x + y + 1 - y = x + 1$ , 所以  $p = \frac{1-x}{y} \cdot$



$p_1 = \frac{1-x^2}{y} = 2$ , 所以  $\triangle AMG$  的周长为定值, 且定值为 2.

(2) 【解】设  $\triangle BFM$  的面积为  $S_1$ , 则  $\frac{S}{S_1} =$

$$\frac{AM^2}{BF^2} = \frac{(1-x)^2}{y^2}.$$

因为  $S_1 = \frac{1}{2}xy$ , 所以  $S = \frac{(1-x)^2}{y^2} \cdot S_1 =$

$$\frac{(1-x)^2 x}{2y} = \frac{(1-x)^2 x}{1-x^2} = \frac{(1-x)x}{1+x} = -(x+$$

$$1) - \frac{2}{x+1} + 3 \leq -2\sqrt{(x+1) \cdot \frac{2}{x+1}} + 3 =$$

$$3 - 2\sqrt{2}, \text{ 当且仅当 } 1+x = \frac{2}{1+x}, \text{ 即 } x = \sqrt{2} -$$

1 时等号成立, 故  $S$  的最大值为  $3 - 2\sqrt{2}$ .

17. C 【解析】由题意可知, 行车的总费用

$$\text{为 } y = \left[ 56 + 8 \left( 3 + \frac{x^2}{360} \right) \right] \cdot \frac{200}{x} =$$

$$\frac{16\,000}{x} + \frac{160x}{36}, \text{ 其中 } 50 \leq x \leq 100, \text{ 由基}$$

$$\text{本不等式可得 } y = 160 \left( \frac{100}{x} + \frac{x}{36} \right) \geq$$

$$160 \times 2 \sqrt{\frac{100}{x} \cdot \frac{x}{36}} = \frac{1\,600}{3}, \text{ 当且仅当}$$

$$\frac{100}{x} = \frac{x}{36} \text{ (} 50 \leq x \leq 100 \text{)}, \text{ 即 } x = 60 \text{ 时, 等}$$

号成立, 因此, 最经济的车速是 60 km/h. 故选 C.

18. 【解】(1) 依题意可得  $\triangle CDQ \sim \triangle PBC$ ,

$$\text{所以 } \frac{DQ}{DC} = \frac{BC}{BP}, \text{ 即 } \frac{x}{30} = \frac{20}{BP}, \text{ 可得 } BP =$$

$$\frac{600}{x}, \text{ 因此 } AP = AB + BP = 30 + \frac{600}{x}.$$

又要求  $AP$  的长不小于 40 m 且不大于

$$90 \text{ m, 即 } 40 \leq 30 + \frac{600}{x} \leq 90, \text{ 解得}$$

$$10 \leq x \leq 60, \text{ 即 } AP = 30 + \frac{600}{x}, 10 \leq$$

$$x \leq 60.$$

(2) 易知  $AQ = AD + DQ = 20 + x$ , 所以  $S =$

$$\frac{1}{2}AP \cdot AQ = \frac{1}{2} \left( 30 + \frac{600}{x} \right) (20 + x) =$$

$$\frac{1}{2} \left( 600 + 30x + \frac{12\,000}{x} + 600 \right).$$

$$\text{由基本不等式可得 } \frac{1}{2} \left( 600 + 30x + \right.$$

$$\left. \frac{12\,000}{x} + 600 \right) \geq \frac{1}{2} \left( 1\,200 + \right.$$



$2\sqrt{30x \cdot \frac{12\,000}{x}} = \frac{1}{2} (1\,200 + 2 \times 600) = 1\,200$ , 当且仅当  $30x = \frac{12\,000}{x}$ , 即  $x=20$  时, 等号成立, 此时  $S$  取得最小值  $1\,200$ .

因此  $DQ=20\text{ m}$  时,  $S$  取得最小值, 最小值为  $1\,200\text{ m}^2$ .



## 能力上分

**1. B** 【解析】因为  $x>1$ , 所以  $2-3x-\frac{4}{x-1} =$

$$-1 - \left[ 3(x-1) + \frac{4}{x-1} \right] \leq -1 -$$

$$2\sqrt{3(x-1) \cdot \frac{4}{x-1}} = -1 - 4\sqrt{3}, \text{ 当且仅当}$$

$$3(x-1) = \frac{4}{x-1}, \text{ 即 } x = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ 时等号成立,}$$

所以  $2-3x-\frac{4}{x-1}$  的最大值是  $-4\sqrt{3}-1$ . 故

选 B.

**2. A** 【解析】由四边形  $ABCD$  为矩形,  $\triangle BCE$  为等腰直角三角形, 可得  $\triangle ABF$  也为等腰直角三角形, 所以题图①中, 阴

$$\text{影部分面积 } S_1 = S_{\triangle ABF} + S_{\triangle BCE} = \frac{1}{2}\sqrt{a} \cdot$$

$$\sqrt{a} + \frac{1}{2}\sqrt{b} \cdot \sqrt{b} = \frac{a+b}{2}, \text{ 题图②中, 矩形}$$

$ABCD$  的面积  $S_2 = \sqrt{ab}$ , 由两图阴影部分

面积关系直观得出  $S_1 \geq S_2$ , 即  $\frac{a+b}{2} \geq$

$\sqrt{ab}$ , 当且仅当  $a=b$  时等号成立. 故选 A.

**3. ACD** 【解析】对于 A,  $a(1-a) \leq$

$$\left[ \frac{a+(1-a)}{2} \right]^2 = \frac{1}{4}, \text{ 当且仅当 } a=1-a, \text{ 即}$$

$a=\frac{1}{2}$  时等号成立, 故 A 正确;

对于 B, 取  $a=1, b=-1$ , 可得

$$\left(a + \frac{1}{a}\right) \left(b + \frac{1}{b}\right) = 2 \times (-2) = -4 < 4, \text{ 故 B}$$

错误;

对于 C,  $a^2+b^2 \geq 2ab$ , 当且仅当  $a=b$  时等

号成立,  $a^2+c^2 \geq 2ac$ , 当且仅当  $a=c$  时等

号成立,  $b^2+c^2 \geq 2bc$ , 当且仅当  $b=c$  时等

号成立, 所以  $2(a^2+b^2+c^2) \geq 2ab+2bc+$

$2ac$ , 当且仅当  $a=b=c$  时等号成立, 所以

$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac$ , 故 C 正确;



对于 D, 因为  $ab > 0$ , 所以  $\frac{a}{b} > 0, \frac{b}{a} > 0$ , 所以  $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} = 2$ , 当且仅当  $a = b \neq 0$  时等号成立, 故 D 正确. 故选 ACD.

4. A 【解析】令  $m = 2x + 5y, n = x - 2y$ , 由题意知  $x > 2y > 0$ , 且  $x + y = 1$ , 得  $m > 0, n > 0$ ,

且  $m + n = 3x + 3y = 3$ , 则  $\frac{9}{2x+5y} + \frac{1}{x-2y} =$

$$\frac{9}{m} + \frac{1}{n} = \frac{3(m+n)}{m} + \frac{m+n}{3n} = \frac{3n}{m} + \frac{m}{3n} +$$

$$\frac{10}{3} \geq 2\sqrt{\frac{3n}{m} \cdot \frac{m}{3n}} + \frac{10}{3} = \frac{16}{3}, \text{ 当且仅当}$$

$$\frac{3n}{m} = \frac{m}{3n}, \text{ 即 } \begin{cases} m = \frac{9}{4}, \\ n = \frac{3}{4} \end{cases} \text{ 时等号成立, 此时}$$

$$\begin{cases} x = \frac{11}{12}, \\ y = \frac{1}{12}, \end{cases} \text{ 故选 A.}$$

5. B 【解析】因为  $a > 0, b > 0$ , 所以  $a + b > 0$ .

不等式  $\frac{m}{a+b} \leq \frac{4a+9b}{ab}$  恒成立, 即  $m \leq$

$$\frac{4a+9b}{ab} \cdot (a+b) \text{ 恒成立.}$$

$$\frac{4a+9b}{ab} \cdot (a+b) = \left( \frac{4}{b} + \frac{9}{a} \right) (a+b) = 13 +$$

$$\frac{4a}{b} + \frac{9b}{a} \geq 13 + 2\sqrt{\frac{4a}{b} \cdot \frac{9b}{a}} = 25, \text{ 当且仅}$$

$$\text{当 } \frac{4a}{b} = \frac{9b}{a}, \text{ 即 } b = \frac{2}{3}a \text{ 时等号成立, 所}$$

以  $m \leq 25$ , 即实数  $m$  的最大值为 25. 故选 B.

6. C 【解析】由  $x + y = 1, x, y > 0$ , 可得  $(x +$

$$1) + (y + 2) = 4, \text{ 所以 } \frac{1}{x+1} + \frac{4}{y+2} =$$

$$\frac{1}{4} \left( \frac{1}{x+1} + \frac{4}{y+2} \right) [(x+1) + (y+2)] =$$

$$\frac{1}{4} \left[ \frac{y+2}{x+1} + \frac{4(x+1)}{y+2} + 5 \right] \geq \frac{1}{4} (2\sqrt{4} +$$

$$5) = \frac{9}{4}, \text{ 当且仅当 } \frac{y+2}{x+1} = \frac{4(x+1)}{y+2}, \text{ 即}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}, \\ y = \frac{2}{3} \end{cases} \text{ 时等号成立, 所以 } m + \frac{9}{2} > \frac{9}{4}, \text{ 解}$$

$$\text{得 } m > -\frac{9}{4}. \text{ 故选 C.}$$





7. ABD 【解析】对于 A,  $a+b+c \leq |a+b+c| =$

$$\sqrt{(a+b+c)^2} = \sqrt{1+2ab+2bc+2ca} \leq$$

$$\sqrt{1+a^2+b^2+b^2+c^2+c^2+a^2} = \sqrt{3}, \text{ 当且仅当}$$

$a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}$  时取等号, 故 A 正确;

$$\text{对于 B, } 1 = a^2 + b^2 + c^2 = b^2 + \frac{1}{2}c^2 + a^2 +$$

$$\frac{1}{2}c^2 \geq \sqrt{2}bc + \sqrt{2}ca, \text{ 则 } bc+ca \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 当且}$$

$$\text{仅当 } a=b=\frac{\sqrt{2}}{2}c=\frac{1}{2} \text{ 或 } a=b=\frac{\sqrt{2}}{2}c=-\frac{1}{2}$$

时取等号, 故 B 正确;

$$\text{对于 C, 由 } (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab +$$

$$bc+ca) \geq 0, \text{ 得 } ab+bc+ca \geq -\frac{1}{2}, \text{ 当且仅}$$

$$\text{当 } a+b+c=0 \text{ 时取等号, 取 } a=\frac{\sqrt{6}}{3}, b=c=$$

$$-\frac{\sqrt{6}}{6}, \text{ 则 } ab+bc+ca = -\frac{1}{2}, \text{ 故 C 错误;}$$

$$\text{对于 D, } a, b, c \in (0, 1), 1-c^2 = a^2 + b^2 \geq$$

$$2ab, \text{ 则 } \frac{1}{ab} \geq \frac{2}{1-c^2}, \text{ 当且仅当 } a=b \text{ 时取等}$$

$$\text{号, 于是 } \frac{1}{abc} + \frac{1}{ab} = \frac{1}{ab} \left( \frac{1}{c} + 1 \right) \geq \frac{2}{1-c^2} \cdot$$

$$\frac{1+c}{c} = \frac{2}{(1-c)c} \geq \frac{2}{\left(\frac{1-c+c}{2}\right)^2} = 8, \text{ 当且仅当}$$

$$a=b, c=\frac{1}{2} \text{ 时取等号, 因此当 } a=b=$$

$$\frac{\sqrt{6}}{4}, c=\frac{1}{2} \text{ 时, } \frac{1}{abc} + \frac{1}{ab} \text{ 取得最小值 } 8, \text{ 故 D}$$

正确. 故选 ABD.

### 方法技巧

在运用基本不等式时, 要特别注意“拆”“拼”“凑”等技巧, 使其满足基本不等式的“一正”“二定”“三相等”的条件.

8.  $16\sqrt{5}$  【解析】设该小城的长、宽分别为

$a, b, 1\ 500 \text{ 步} = 5 \text{ 里}, 1\ 200 \text{ 步} = 4 \text{ 里}, \text{ 则}$

$$4 = \frac{\frac{a}{2} \times \frac{b}{2}}{5}, \text{ 即 } ab = 80, \text{ 故周长为 } 2(a +$$

$$b) \geq 4\sqrt{ab} = 16\sqrt{5}, \text{ 当且仅当 } a=b=4\sqrt{5} \text{ 时等号成立.}$$

## 专题上分 2 利用基本

### 不等式求最值

1. D 【解析】因为正数  $a, b$  满足  $ab=2$ , 所

$$\text{以 } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}} = \sqrt{2}, \text{ 当且仅当 } a =$$



$b=\sqrt{2}$  时, 等号成立, 所以  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$  的最小值为  $\sqrt{2}$ . 故选 D.

**2. D** 【解析】因为  $a, b \in \mathbf{R}, ab > 0$ , 所以  $a^2 + \frac{2}{ab} + 4b^2 = a^2 + 4b^2 + \frac{2}{ab} \geq 4ab + \frac{2}{ab} \geq 4\sqrt{2}$ ,

当且仅当  $\begin{cases} a=2b, \\ ab=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$  时取等号. 故选 D.

**3. A** 【解析】由正实数  $x, y$  满足  $4x+3y=4$ , 可得  $2(2x+1)+(3y+2)=8$ .

令  $a=2x+1, b=3y+2$ , 可得  $2a+b=8$ ,

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{3y+2} &= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \times \\ \frac{2a+b}{8} &= \frac{1}{8} \times \left( 3 + \frac{2a}{b} + \frac{b}{a} \right) \geq \frac{1}{8} \times \\ \left( 3 + 2\sqrt{\frac{2a}{b} \cdot \frac{b}{a}} \right), &\text{即 } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{3}{8} + \frac{\sqrt{2}}{4}, \end{aligned}$$

当且仅当  $\frac{2a}{b} = \frac{b}{a}$ , 即  $a=8-4\sqrt{2}, b=8\sqrt{2}-8$ , 即  $x=\frac{7}{2}-2\sqrt{2}, y=\frac{8\sqrt{2}-10}{3}$  时取等号,

$$\therefore \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{3y+2} \text{ 的最小值为 } \frac{3}{8} + \frac{\sqrt{2}}{4}. \text{ 故}$$

选 A.

#### 4. A



#### 思路导引

先变形得到  $a+b = \frac{1}{a} + \frac{2}{b}$ , 故  $(a+b)^2 = (a+b) \cdot \left( \frac{1}{a} + \frac{2}{b} \right)$ , 利用基本不等式求出最小值.

【解析】由  $ab-1 = \frac{a}{a+b}$ , 得  $ab = \frac{a}{a+b} + 1 =$

$\frac{2a+b}{a+b}$ , 即  $a+b = \frac{2a+b}{ab} = \frac{1}{a} + \frac{2}{b}$ . 因为  $a > 0$ ,

$b > 0$ , 所以  $\frac{b}{a} > 0, \frac{2a}{b} > 0$ , 则  $(a+b)^2 = (a+b)$

$$\left( \frac{1}{a} + \frac{2}{b} \right) = 3 + \frac{b}{a} + \frac{2a}{b} \geq 3 +$$

$$2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{2a}{b}} = 3 + 2\sqrt{2}, \text{ 当且仅当 } \frac{b}{a} = \frac{2a}{b},$$

即  $a=1, b=\sqrt{2}$  时取等号, 所以  $a+b \geq$

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{2}+1, \text{ 故 } (a+b)_{\min} = \sqrt{2}+1. \text{ 故}$$

选 A.

**5. D** 【解析】因为  $ab=2$ , 所以

$$\frac{(a-1)^2 + (b+1)^2}{a-b} = \frac{a^2 + b^2 + 2 - 2a + 2b}{a-b} =$$



$$\frac{a^2+b^2+ab}{a-b}-2=\frac{(a-b)^2+3ab}{a-b}-2=(a-b)+$$

$$\frac{6}{a-b}-2. \text{ 因为 } a>b, \text{ 所以 } a-b>0, \text{ 所以由}$$

$$\text{基本不等式可得 } \frac{(a-1)^2+(b+1)^2}{a-b}=(a-$$

$$b)+\frac{6}{a-b}-2 \geqslant 2\sqrt{6}-2, \text{ 当且仅当}$$

$$\begin{cases} ab=2, \\ a-b=\sqrt{6}, \text{ 即} \\ a>b, \end{cases} \begin{cases} a=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{14}}{2}, \\ b=\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{14}}{2} \end{cases}$$

$$\text{或} \begin{cases} a=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{14}}{2}, \\ b=\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{14}}{2} \end{cases} \text{ 时, 等号成立.}$$

$$\text{综上所述, } \frac{(a-1)^2+(b+1)^2}{a-b} \text{ 的最小值为}$$

$$2\sqrt{6}-2. \text{ 故选 D.}$$

**6.5 【解析】** 因为  $xy>0$ , 所以  $\frac{x}{y}+\frac{9y}{x+y}=$

$$\frac{x+y-y}{y}+\frac{9y}{x+y}=\frac{x+y}{y}+\frac{9y}{x+y}-1 \geqslant$$

$$2\sqrt{\frac{x+y}{y} \cdot \frac{9y}{x+y}}-1=5, \text{ 当且仅当 } x+y=3y,$$

$$\text{即 } x=2y \text{ 时取等号.}$$

**7.5√2 【解析】** 因为  $m>n>0$ , 所以  $m+n>$

$$0, m-n>0, m+\frac{9}{m+n}+\frac{4}{m-n}=\frac{1}{2}(m+n)+$$

$$\frac{9}{m+n}+\frac{1}{2}(m-n)+\frac{4}{m-n}.$$

$$\text{因为 } \frac{1}{2}(m+n)+\frac{9}{m+n} \geqslant$$

$$2\sqrt{\frac{1}{2}(m+n) \cdot \frac{9}{m+n}}=3\sqrt{2}, \text{ 当且仅当}$$

$$\frac{1}{2}(m+n)=\frac{9}{m+n}, \text{ 即 } m+n=3\sqrt{2} \text{ 时, 等号}$$

$$\text{成立.}$$

$$\frac{1}{2}(m-n)+\frac{4}{m-n} \geqslant$$

$$2\sqrt{\frac{1}{2}(m-n) \cdot \frac{4}{m-n}}=2\sqrt{2}, \text{ 当且仅当}$$

$$\frac{1}{2}(m-n)=\frac{4}{m-n}, \text{ 即 } m-n=2\sqrt{2} \text{ 时, 等号}$$

$$\text{成立, 所以 } m+\frac{9}{m+n}+\frac{4}{m-n} \geqslant 3\sqrt{2}+2\sqrt{2}=$$

$$5\sqrt{2}, \text{ 当且仅当 } \begin{cases} m+n=3\sqrt{2}, \\ m-n=2\sqrt{2}, \end{cases} \text{ 即 } m=\frac{5\sqrt{2}}{2},$$

$$n=\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 时, 等号成立, 所以 } m+\frac{9}{m+n}+$$

$$\frac{4}{m-n} \text{ 的最小值为 } 5\sqrt{2}.$$



## 8. B



## 思路导引

将代数式  $x+2y$  与  $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}\right)$  相乘, 展开后利用基本不等式可求得  $x+2y$  的最小值.

【解析】因为  $x, y \in (0, +\infty)$ , 且满足  $\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} = 2$ , 所以  $x+2y = \frac{1}{2}(x+2y) \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2y}\right) = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2y}{x} + \frac{x}{2y}\right) \geq \frac{1}{2}\left(2 + 2\sqrt{\frac{2y}{x} \cdot \frac{x}{2y}}\right) = 2$ , 当且仅当  $\begin{cases} \frac{x}{2y} = \frac{2y}{x}, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{2y} = 2, \\ x > 0, 2y > 0, \end{cases}$  即  $\begin{cases} x=1, \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$  时, 等号成立, 因此

此  $x+2y$  的最小值为 2. 故选 B.

## 快解

由权方和不等式可得  $\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} = 2 \geq \frac{(1+1)^2}{x+2y} = \frac{4}{x+2y}$ , 即  $x+2y \geq 2$ , 当且仅当  $\begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{2y}, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{2y} = 2, \\ x > 0, 2y > 0, \end{cases}$  即  $\begin{cases} x=1, \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$  时, 等号成立, 因此  $x+2y$  的最小值为 2. 故选 B.

[变式] C 【解析】由  $x+2y=8xy$ , 可得  $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 8$ , 则  $4x+2y = \frac{1}{8}(4x+2y) \cdot \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{8}\left(10 + \frac{4y}{x} + \frac{4x}{y}\right) \geq \frac{1}{8}\left(10 + 2\sqrt{\frac{4y}{x} \cdot \frac{4x}{y}}\right) = \frac{9}{4}$ , 当且仅当  $\frac{4y}{x} = \frac{4x}{y}$ , 即  $x=y=\frac{3}{8}$  时, 等号成立, 所以  $4x+2y$  的最小值为  $\frac{9}{4}$ . 故选 C.

## 快解

由权方和不等式可得  $8 = \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{y} = \frac{4}{2x} + \frac{1}{y} \geq \frac{(2+1)^2}{2x+y} = \frac{9}{2x+y}$ , 当且仅当  $\begin{cases} \frac{2}{2x} = \frac{1}{y}, \\ \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 8, \end{cases}$  即  $x=y=\frac{3}{8}$  时, 等号成立, 所以  $2x+y \geq \frac{9}{8}$ , 即  $4x+2y$  的最小值为  $\frac{9}{4}$ . 故选 C.



## 9. C



## 思路导引

变形得到  $\frac{a+1}{9} +$ 

$$\frac{2(b+2)}{9} = 1, \text{由基本不等式中“1”的妙}$$

用求出最小值.

【解析】实数  $a > 0, b > 0$ , 满足  $a + 2b = 4$ , 故

$$a + 1 + 2(b + 2) = 9, \text{即 } \frac{a+1}{9} + \frac{2(b+2)}{9} = 1, \text{故}$$

$$\frac{1}{a+1} + \frac{2}{b+2} = \left( \frac{1}{a+1} + \frac{2}{b+2} \right) \left[ \frac{a+1}{9} + \frac{2(b+2)}{9} \right] = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{2(a+1)}{9(b+2)} +$$

$$\frac{2(b+2)}{9(a+1)} \geq \frac{5}{9} + 2\sqrt{\frac{2(a+1)}{9(b+2)} \cdot \frac{2(b+2)}{9(a+1)}} =$$

$$\frac{5}{9} + \frac{4}{9} = 1, \text{当且仅当 } \frac{2(a+1)}{9(b+2)} = \frac{2(b+2)}{9(a+1)},$$

$$\text{即 } a = 2, b = 1 \text{ 时, 等号成立, 故 } \frac{1}{a+1} +$$

$$\frac{2}{b+2} \text{ 的最小值为 } 1.$$

10.  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

【解析】由已知得  $x \neq 0, y =$ 

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{x} - x \right), \text{所以 } x^2 + y^2 = x^2 +$$

$$\frac{1}{4} \left( \frac{1}{x} - x \right)^2 = \frac{5}{4} x^2 + \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{2} \geq$$

$$2\sqrt{\frac{5}{4}x^2 \cdot \frac{1}{4x^2}} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \text{当且仅当}$$

$$\frac{5}{4}x^2 = \frac{1}{4x^2}, \text{即 } x = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{5}} \text{ 时取等号.}$$

## 方法技巧

通过消元利用基本不等式求最值的策略

当所求最值的代数式中的变量比较多时, 通常考虑利用已知条件消去部分变量后, 凑出“和为常数”或“积为常数”的形式, 最后利用基本不等式求最值.

11.  $\frac{4}{3}$

【解析】设  $\begin{cases} 4x+y=a, \\ x+y=b, \end{cases}$ 

$$\text{则 } \begin{cases} x = \frac{a-b}{3}, \\ y = \frac{4b-a}{3}, \end{cases} \text{因此 } \frac{4x}{4x+y} + \frac{y}{x+y} =$$

$$\frac{\frac{4(a-b)}{3}}{a} + \frac{\frac{4b-a}{3}}{b} = \frac{4}{3} - \frac{4b}{3a} + \frac{4}{3} - \frac{a}{3b} =$$

$$\frac{8}{3} - \left( \frac{4b}{3a} + \frac{a}{3b} \right).$$



因为  $\frac{4b}{3a} + \frac{a}{3b} \geq 2\sqrt{\frac{4b}{3a} \cdot \frac{a}{3b}} = \frac{4}{3}$ , 当且仅当  $\frac{4b}{3a} = \frac{a}{3b}$ , 即  $a = 2b$  时, 等号成立, 所以  $\frac{4x}{4x+y} + \frac{y}{x+y} \leq \frac{8}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$ , 当且仅当  $y = 2x$  时, 等号成立.

**12.6 【解析】** 因为  $x > 0, y > 0, x + y = 1$ , 所以

$$0 < x < 1, \frac{3x}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{3x}{1-x} + \frac{1}{x(1-x)} = \frac{3x^2+1}{-x^2+x} = \frac{3x^2-3x+3x+1}{-x^2+x} = -3 + \frac{3x+1}{-x^2+x}.$$

令  $3x+1 = t \in (1, 4)$ , 则  $\frac{3x}{y} + \frac{1}{xy} = -3 +$

$$\frac{t}{-\left(\frac{t-1}{3}\right)^2 + \frac{t-1}{3}} = -3 - \frac{t}{\frac{t^2}{9} - \frac{5}{9}t + \frac{4}{9}} = -3 -$$

$$\frac{1}{\frac{t}{9} + \frac{4}{9t} - \frac{5}{9}}, \text{ 其中 } \frac{t}{9} + \frac{4}{9t} \geq$$

$$2\sqrt{\frac{t}{9} \cdot \frac{4}{9t}} = \frac{4}{9}, \text{ 当且仅当 } \frac{t}{9} = \frac{4}{9t}, \text{ 即}$$

$$t = 2 \text{ 时, 等号成立, 故 } \frac{3x}{y} + \frac{1}{xy} = -3 -$$

$$\frac{1}{\frac{t}{9} + \frac{4}{9t} - \frac{5}{9}} \geq -3 - \frac{1}{\frac{4}{9} - \frac{5}{9}} = 6, \text{ 即 } \frac{3x}{y} +$$

$$\frac{1}{xy} \text{ 的最小值为 } 6, \text{ 此时 } x = \frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}.$$

**13. B 【解析】** 因为  $a > 0, b > 0, ab = 4a + b + 5$ , 所以  $ab - 5 = 4a + b$ , 且  $4a + b \geq$

$$2\sqrt{4a \cdot b} = 4\sqrt{ab}, \text{ 可得 } ab - 5 \geq 4\sqrt{ab},$$

$$\text{解得 } \sqrt{ab} \geq 5 \text{ 或 } \sqrt{ab} \leq -1 \text{ (舍去), 所以}$$

$$ab \geq 25,$$

$$\text{当且仅当 } 4a = b, \text{ 即 } a = \frac{5}{2}, b = 10 \text{ 时, 等}$$

$$\text{号成立, 所以 } ab \text{ 的最小值为 } 25. \text{ 故}$$

$$\text{选 B.}$$

**14. BC 【解析】** 对于 A,  $ab + 2(a + b) = 14 \geq$

$$ab + 2 \times 2\sqrt{ab}, \text{ 则 } (\sqrt{ab})^2 + 4\sqrt{ab} - 14 \leq$$

$$0, \text{ 解得 } 0 < \sqrt{ab} \leq -2 + 3\sqrt{2}, \text{ 当且仅当}$$

$$\begin{cases} a = b, \\ ab + 2(a + b) = 14, \end{cases} \text{ 即 } a = b = -2 + 3\sqrt{2} \text{ 时,}$$

$$\text{等号成立, 所以 } 0 < ab \leq (-2 + 3\sqrt{2})^2 =$$

$$22 - 12\sqrt{2}, \text{ 所以 A 错误.}$$

$$\text{对于 B, } ab + 2(a + b) = 14, ab + 4 + 2(a +$$

$$b) = (a + 2)(b + 2) = 18, \frac{3}{a+2} + \frac{3}{b+2} = 3 \times$$



$$\frac{a+2+b+2}{(a+2)(b+2)} = \frac{1}{6}(a+2+b+2) \geq \frac{1}{6} \times$$

$$2\sqrt{(a+2) \cdot (b+2)} = \frac{1}{3} \times \sqrt{18} = \sqrt{2}, \text{当}$$

且仅当  $a+2=b+2$ , 即  $a=b=-2+3\sqrt{2}$  时, 等号成立, 所以 B 正确.

$$\text{对于 D, } 14=ab+2(a+b) = \frac{1}{2}b(2a+2) +$$

$$b+2a \leq \frac{1}{2} \left( \frac{b+2a+2}{2} \right)^2 + b+2a, \text{整理}$$

$$\text{得 } (b+2a)^2 + 12(b+2a) - 108 \geq 0, (b+$$

$$2a+18)(b+2a-6) \geq 0, \text{则 } b+2a \geq 6, \text{当}$$

且仅当  $b=2a+2=4$  时, 等号成立, 所以 D 错误.

$$\text{对于 C, } 14=ab+2(a+b) = ab+b+2a+b =$$

$$b(a+1)+2a+b, \text{由 D 选项的分析可知}$$

$$b(a+1) = 14 - (2a+b) \leq 14 - 6 = 8, \text{所以}$$

C 正确.

故选 BC.

### 方法点拨

用基本不等式求最值时, 要注意其必须满足的三个条件: “一正, 二定, 三相等”.

(1) “一正”就是各项必须为正数;

(2) “二定”就是要求和的最小值, 必须把构成和的二项之积转化成定值; 要求积的最大值, 则必须把构成积的因式的和转化成定值;

(3) “三相等”是利用基本不等式求最值时, 必须验证等号成立的条件, 若不能取等号, 则这个最值就不是所求的最值, 这也是最容易出现错误的地方, 多次运用不等式时, 注意等号成立条件是否一致.

## 2.1~2.2 节测上分

1. C 【解析】对于 A,  $a>b, ab>0$ , 不等式两

边同时除以  $ab$  可得  $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$ , 故 A 正确;

对于 B,  $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}, c<0$ , 不等式两边同时乘  $c$ , 可得  $a<b$ , 故 B 正确;

对于 C, 因为  $a>b>c$ , 所以  $a-c>b-c>0$ , 所以  $\frac{1}{b-c} > \frac{1}{a-c}$ , 故 C 错误;

对于 D,  $a>b, c^2 \geq 0$ , 所以  $ac^2 \geq bc^2$ , 故 D 正确. 故选 C.



**2. D** 【解析】因为  $a + \frac{1}{b} = 2$ , 所以  $(a-1) + \frac{1}{b} = 1$ , 其中  $a-1 > 0, b > 0$ , 所以  $\frac{4}{a-1} + b = \left[ (a-1) + \frac{1}{b} \right] \cdot \left( \frac{4}{a-1} + b \right) = 4 + b(a-1) + \frac{4}{b(a-1)} + 1 \geq 5 + 2\sqrt{b(a-1) \cdot \frac{4}{b(a-1)}} = 9$ , 当且仅当  $b(a-1) = \frac{4}{b(a-1)}$  且  $a + \frac{1}{b} = 2$ , 即  $a = \frac{5}{3}, b = 3$  时, 等号成立, 所以  $\frac{4}{a-1} + b$  的最小值为 9. 故选 D.

**3. A** 【解析】设选辩题 A 的男生有  $x$  人, 选辩题 A 的女生有  $y$  人, 选辩题 B 的男生有  $m$  人, 选辩题 B 的女生有  $n$  人. 已知该班女生人数多于男生人数, 即  $y + n > x + m$ . 又知选辩题 A 的人数多于选辩题 B 的人数, 即  $x + y > m + n$ . 将这两个不等式相加得到  $2y + x + n > 2m + x + n$ , 两边同时减去  $x + n$  得到  $2y > 2m$ , 即  $y > m$ . 这就意味着选辩题 A 的女生人数多于选辩题 B 的男生人数. 故选 A.

**4. C** 【解析】因为  $(x-1)(y-2) = 2, x > 0, y > 0$ , 所以  $xy = 2x + y$ , 即  $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 1$ , 所以  $3x + 2y = (3x + 2y) \left( \frac{1}{x} + \frac{2}{y} \right) = 7 + \frac{2y}{x} + \frac{6x}{y} \geq 7 + 2\sqrt{\frac{2y}{x} \cdot \frac{6x}{y}} = 7 + 4\sqrt{3}$ , 当且仅当  $\begin{cases} \frac{2y}{x} = \frac{6x}{y}, \\ x > 0, y > 0, \\ (x-1)(y-2) = 2, \end{cases}$  即  $\begin{cases} x = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}, \\ y = 2 + \sqrt{3} \end{cases}$  时, 等号成立.

综上所述,  $3x + 2y$  的最小值为  $7 + 4\sqrt{3}$ . 因为不等式  $3x + 2y > m$  恒成立, 所以实数  $m$  的取值范围是  $\{m | m < 7 + 4\sqrt{3}\}$ . 故选 C.

**5. BCD** 【解析】因为  $x + y = 2, x > 0, y > 0$ , 所以  $2\sqrt{xy} \leq x + y = 2$ , 当且仅当  $x = y = 1$  时取等号, 故 A 正确;  
 $x^2 + y^2 \geq 2 \left( \frac{x+y}{2} \right)^2 = 2$ , 当且仅当  $x = y = 1$  时取等号, 所以  $x^2 + y^2$  的最小值为 2, 故 B 错误;  
 $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = x + y + 2\sqrt{xy} \leq 2 + 2 = 4$ , 当且仅





当  $x=y=1$  时取等号, 所以  $\sqrt{x}+\sqrt{y}$  的最大值为 2, 故 C 错误;

$$\frac{4xy}{x+y} = \frac{4}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = \frac{8}{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(x+y)} =$$

$$\frac{8}{2 + \frac{y}{x} + \frac{x}{y}} \leq \frac{8}{2+2} = 2, \text{ 当且仅当 } x=y=1$$

时取等号, 所以  $\frac{4xy}{x+y}$  的最大值为 2, 故 D

错误. 故选 BCD.

## 6. D



### 攻略上分

先将  $5a-4b$  用  $a-b$ ,  $a+b$  表示出来, 又由  $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a+b} = 4$ , 得

$$1 = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{a-b} + \frac{1}{a+b} \right), \text{ 再利用基本不等}$$

式即可得出最小值, 可用大招攻略 9 快速求解.

【解析】设  $5a-4b=s(a-b)+t(a+b)=(s+$

$$t)a-(s-t)b, \text{ 则 } \begin{cases} s+t=5, \\ s-t=4, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} s=\frac{9}{2}, \\ t=\frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\text{则 } 5a-4b = \frac{9}{2}(a-b) + \frac{1}{2}(a+b)$$

$$= \frac{1}{4} \left[ \frac{9}{2}(a-b) + \frac{1}{2}(a+b) \right] \left( \frac{1}{a-b} + \frac{1}{a+b} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left[ 5 + \frac{a+b}{2(a-b)} + \frac{9(a-b)}{2(a+b)} \right]$$

$$\geq \frac{1}{4} \left[ 5 + 2\sqrt{\frac{a+b}{2(a-b)} \cdot \frac{9(a-b)}{2(a+b)}} \right] = 2,$$

$$\text{当且仅当 } \frac{a+b}{2(a-b)} = \frac{9(a-b)}{2(a+b)}, \text{ 即 } a = \frac{2}{3},$$

$$b = \frac{1}{3} \text{ 时, 等号成立, 所以 } 5a-4b \text{ 的最小}$$

值为 2. 故选 D.

## 7. $\left\{ 3a-2b \mid \frac{9}{2} \leq 3a-2b \leq \frac{19}{2} \right\}$



### 攻略上分

令  $m(a+b)+n(a-b)=3a-2b$ , 求出  $m, n$  的值, 再应用不等式的性质求  $3a-2b$  的取值范围, 可利用通法攻略 7 正确求解.

【解析】令  $m(a+b)+n(a-b)=3a-2b$ ,

则  $(m+n)a+(m-n)b=3a-2b$ , 所以

$$\begin{cases} m+n=3, \\ m-n=-2, \end{cases} \text{ 可得 } \begin{cases} m=\frac{1}{2}, \\ n=\frac{5}{2}, \end{cases} \text{ 故 } 3a-2b =$$



$$\frac{1}{2}(a+b) + \frac{5}{2}(a-b), \text{ 而 } -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}(a+b) \leq 2, 5 \leq \frac{5}{2}(a-b) \leq \frac{15}{2}, \text{ 故 } \frac{9}{2} \leq 3a-2b \leq \frac{19}{2}.$$

8.  $\sqrt[3]{2}$ 

## 思路导引

由  $a^2c + b^2c = 1$ , 得  $a^2 + b^2 = \frac{1}{c}$ , 设  $\max\left\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right\} = M$ , 则  $M \geq \frac{1}{a}, M \geq \frac{1}{b}, M \geq \frac{1}{c}$ , 再结合基本不等式求解.

【解析】由  $a^2c + b^2c = 1$  可得  $a^2 + b^2 = \frac{1}{c}$ ,

设  $\max\left\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right\} = M$ , 则  $M \geq \frac{1}{a}, M \geq \frac{1}{b}, M \geq \frac{1}{c} = a^2 + b^2 \geq 2ab$ ,

由  $3M = 2\sqrt{M} \cdot \sqrt{M} + M \geq 2\frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{b}} +$

$$2ab = \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{ab}} + 2ab$$

$\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{ab}} \cdot \frac{1}{\sqrt{ab}} \cdot 2ab} = 3\sqrt[3]{2}$ , 当且仅当

$a = b = c = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$  时, 等号成立.

故  $\min\left\{\max\left\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right\}\right\} = \sqrt[3]{2}$ .

## 方法技巧

当  $a, b, c$  均大于 0 时,

$$\frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \leq \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} \leq$$

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}, \text{ 当且仅当 } a=b=c \text{ 时取等}$$

号; 当  $a_1, a_2, \dots, a_n (n \geq 2)$  均大于 0 时,

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}, \text{ 当且}$$

仅当  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$  时取等号.

9.4 【解析】因为  $a \geq b > 0$ , 所以  $\frac{ab^2}{a-b} + ab +$

$$\frac{1}{b^2} = \frac{ab^2 - b^3 + b^3}{a-b} + ab + \frac{1}{b^2} = b^2 + \frac{b^3}{a-b} + ab +$$

$$\frac{1}{b^2} = 2b^2 + \frac{b^3}{a-b} + ab - b^2 + \frac{1}{b^2} = 2b^2 + \frac{1}{b^2} +$$

$$\frac{b^3}{a-b} + b(a-b) \geq 2b^2 + \frac{1}{b^2} + 2\sqrt{\frac{b^3}{a-b} \cdot b(a-b)} = 2b^2 + \frac{1}{b^2} + 2b^2 = 4b^2 + \frac{1}{b^2} \geq 2\sqrt{4b^2 \cdot \frac{1}{b^2}} = 4, \text{ 当且仅当 } \frac{b^3}{a-b} = b(a-b), \text{ 且 } 4b^2 = \frac{1}{b^2}, \text{ 即 } a = \sqrt{2}, b = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 时,}$$

第二个不等号中的等号成立, 此时  $\frac{ab^2}{a-b} + ab + \frac{1}{b^2}$  的最小值为 4.

**10. 【解】** (1) 因为  $x > 0, y > 0$ , 且满足  $\frac{4}{x} + \frac{1}{y} = 2$ , 所以  $x+y = \frac{1}{2}(x+y) \cdot \left(\frac{4}{x} + \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{2} \left(5 + \frac{4y}{x} + \frac{x}{y}\right) \geq \frac{1}{2} \left(5 + 2\sqrt{\frac{4y}{x} \cdot \frac{x}{y}}\right) = \frac{9}{2}$ , 当且仅当  $x=2y$  且  $\frac{4}{x} + \frac{1}{y} = 2$ , 即  $y = \frac{3}{2}, x = 3$  时取等号, 故  $x+y$  的最小值为  $\frac{9}{2}$ .

(2) 因为  $\frac{4}{x} + \frac{1}{y} = 2$ , 所以  $4y+x = 2xy \geq 2\sqrt{4y \cdot x} = 4\sqrt{xy}$ , 当且仅当  $x=4y$ , 即  $y=1, x=4$  时取等号, 所以  $xy \geq 4$ ,

则  $\frac{1}{(x+4)(y+1)} = \frac{1}{xy+x+4y+4} = \frac{1}{3xy+4} \leq \frac{1}{16}$ , 故  $\frac{1}{(x+4)(y+1)}$  的最大值为  $\frac{1}{16}$ .

## 2.3 二次函数与一元二次方程、不等式



**1. D 【解析】**  $A = \{x | x-3 > 0\} = \{x | x > 3\}$ ,  $B = \{x | x^2 - 5x + 4 > 0\} = \{x | (x-4)(x-1) > 0\} = \{x | x > 4 \text{ 或 } x < 1\}$ , 所以  $A \cap B = \{x | x > 3\} \cap \{x | x > 4 \text{ 或 } x < 1\} = \{x | x > 4\}$ . 故选 D.

**2. D 【解析】** 对于 A, 由  $3x^2 - 7x - 10 \leq 0$  得  $(3x+10)(x-1) \leq 0$ , 解得  $-1 \leq x \leq \frac{10}{3}$ , 所以不等式  $3x^2 - 7x - 10 \leq 0$  的解集为  $\left\{x \mid -1 \leq x \leq \frac{10}{3}\right\}$ , 故 A 不符合题意;



对于 B, 由  $-x^2+6x-9 \leq 0$  得  $x^2-6x+9 \geq 0$ ,  
即  $(x-3)^2 \geq 0$ , 所以不等式  $-x^2+6x-9 \leq 0$   
的解集为  $\mathbf{R}$ , 故 B 不符合题意;

对于 C, 由  $-2x^2-x < -3$  得  $2x^2+x-3 > 0$ ,  
即  $(2x+3)(x-1) > 0$ , 解得  $x < -\frac{3}{2}$  或  $x > 1$ ,

所以不等式  $-2x^2-x < -3$  的解集为  
 $\left\{x \mid x < -\frac{3}{2} \text{ 或 } x > 1\right\}$ , 故 C 不符合题意;

对于 D, 由  $x^2-4x+7 \leq 0$  得  $(x-2)^2 \leq -3$ ,  
所以不等式  $x^2-4x+7 \leq 0$  的解集为  $\varnothing$ , 故  
D 符合题意. 故选 D.

### 规律点拨 解不含参数的一元二次不等式的一般步骤

(1) 将不等式变形, 使一端为 0  
且另一端二次项系数大于 0, 即  $ax^2+bx+c > 0 (a > 0)$ ,  $ax^2+bx+c < 0 (a > 0)$  (不等号也可以为“ $\geq$ ”“ $\leq$ ”);

(2) 将对应方程因式分解或计算  
对应方程的判别式;

(3) 求出相应的一元二次方程的  
根或根据判别式说明方程没有实根;

(4) 根据函数图象与  $x$  轴的相对  
位置写出不等式的解集.

## 3. D

**攻略上分** 不等式左侧已经因式分解, 结合大招攻略 10 可知只需要判断  $m$  和  $\frac{1}{m}$  的大小关系就能写出解集.

**【解析】** 因为  $0 < m < 1$ , 所以  $\frac{1}{m} > m$ , 所以  $(x-m)\left(x-\frac{1}{m}\right) < 0$  的解集为  $\left\{x \mid m < x < \frac{1}{m}\right\}$ . 故选 D.

## 4. A

**攻略上分** 含参数的一元二次不等式中, 二次项系数为 1, 左侧可以因式分解, 利用大招攻略 10 求该不等式的解集, 再根据充分不必要条件转化为两个解集端点间的关系.

**【解析】** 由不等式  $x^2+3x-4 < 0$ , 解得  $-4 < x < 1$ .

由不等式  $x^2-(2k+3)x+k^2+3k > 0$ , 解



得  $x < k$  或  $x > k+3$ .

$\therefore$  “ $x^2+3x-4 < 0$ ”是“ $x^2-(2k+3)x+k^2+3k > 0$ ”的充分不必要条件,  $\therefore 1 \leq k$  或  $-4 \geq k+3$ , 解得  $k \geq 1$  或  $k \leq -7$ , 则实数  $k$  的值可以是  $-8$ . 故选 A.

5.

**攻略上分**

两个不等式中都含有参数, 需要利用大招攻略 10 中的步骤讨论.

**【解】**(1) 若  $\Delta = a^2 - 16 \leq 0$ , 即  $-4 \leq a \leq 4$ , 则原不等式的解集为  $\emptyset$ ;

若  $\Delta = a^2 - 16 > 0$ , 即  $a < -4$  或  $a > 4$ , 方程  $x^2 - ax + 4 = 0$  的根为  $x_1 =$

$$\frac{a - \sqrt{a^2 - 16}}{2}, x_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 16}}{2}, \text{则原不等}$$

式的解集为  $\left\{ x \mid \frac{a - \sqrt{a^2 - 16}}{2} < x < \frac{a + \sqrt{a^2 - 16}}{2} \right\}$ .

综上, 当  $-4 \leq a \leq 4$  时, 所求解集为  $\emptyset$ , 当  $a < -4$  或  $a > 4$  时, 所求解集为

$$\left\{ x \mid \frac{a - \sqrt{a^2 - 16}}{2} < x < \frac{a + \sqrt{a^2 - 16}}{2} \right\}.$$

(2) 若  $a = 0$ , 则原不等式可化为  $-4x + 4 \geq 0$ , 解得  $x \leq 1$ .

若  $a < 0$ , 则原不等式可化为  $(x-1) \cdot \left( x - \frac{4}{a} \right) \leq 0$ , 解得  $\frac{4}{a} \leq x \leq 1$ .

若  $a > 0$ , 则原不等式可化为  $(x-1) \cdot \left( x - \frac{4}{a} \right) \geq 0$  (\*), 当  $a = 4$  时,  $\frac{4}{a} = 1$ , 则不等式(\*)的解集为  $\mathbf{R}$ ;

当  $a > 4$  时,  $\frac{4}{a} < 1$ , 则不等式(\*)的解集为  $\left\{ x \mid x \leq \frac{4}{a} \text{ 或 } x \geq 1 \right\}$ ;

当  $0 < a < 4$  时,  $\frac{4}{a} > 1$ , 则不等式(\*)的解集为  $\left\{ x \mid x \leq 1 \text{ 或 } x \geq \frac{4}{a} \right\}$ .

综上, 当  $a < 0$  时, 所求解集为  $\left\{ x \mid \frac{4}{a} \leq x \leq 1 \right\}$ ; 当  $a = 0$  时, 所求解集为  $\{x \mid x \leq 1\}$ ; 当  $0 < a < 4$  时, 所求解集为  $\left\{ x \mid x \leq 1 \text{ 或 } x \geq \frac{4}{a} \right\}$ ; 当  $a = 4$  时, 所求



解集为  $\mathbf{R}$ ; 当  $a > 4$  时, 所求解集为

$$\left\{ x \mid x \leq \frac{4}{a} \text{ 或 } x \geq 1 \right\}.$$

### 易错警示 解含参不等式时分类讨论不全致错

(1) 在高中阶段, 判别式是与“二次”联系在一起的, 在处理二次项系数含参数的问题时, 要注意进行讨论, 二次项系数不为 0 是“二次”的前提.

(2) 分类需要做到使所给参数  $a$  的集合的并集为全集, 交集为空集. 本题(2)分类的标准首先是二次项系数  $a$  是否为 0, 其次是  $a$  的正负, 最后是  $\frac{4}{a}$  与 1 的大小关系.

(3) 当讨论  $a < 0$  时, 要注意变形时不等式中不等号方向的变化及解集的选取.

## 6. ACD



### 攻略上分

根据通法攻略 11 可知, 给出一元二次不等式的解集, 也就是给出了对应方程的根, 结合根与系数的关系可以得出  $a, b, c$  的关系式.

【解析】对于 A, 不等式  $ax^2 + bx + c \geq 0$  的解集为  $\{x \mid x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 4\}$ , 故  $x = -1$  和  $x = 4$  是方程  $ax^2 + bx + c = 0$  的两个根,

$$\text{所以} \begin{cases} a > 0, \\ -\frac{b}{a} = -1 + 4, \\ \frac{c}{a} = -1 \times 4, \end{cases} \text{解得 } b = -3a, c = -4a,$$

故 A 正确;

对于 B,  $cx^2 - bx + a < 0$  可变为  $-4ax^2 + 3ax + a < 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 3x - 1 > 0$ , 解得  $x > 1$  或  $x < -\frac{1}{4}$ ,

故 B 错误;

对于 C,  $\frac{3}{b} + c = \frac{3}{-3a} + (-4a) = \frac{1}{-a} - 4a =$

$$-\left(\frac{1}{a} + 4a\right) \leq -2\sqrt{\frac{1}{a} \cdot 4a} = -4, \text{ 当且仅当 } \frac{1}{a} = 4a, \text{ 即 } a = \frac{1}{2} \text{ 时, 等号成立, 所以}$$

$\frac{3}{b} + c$  的最大值为  $-4$ , 故 C 正确;

对于 D, 因为  $x = -1$  是方程  $ax^2 + bx + c = 0$



的根, 所以  $a - b + c = 0$ , 故 D 正确. 故选 ACD.

$$7. \left\{ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \mid -\frac{2}{3} < \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} < 0 \right\}$$

**攻略上分**

根据通法攻略 11 确

定  $x_1, x_2$  是方程  $a(x+1)(x-3)+1=0$  的两个根, 注意不要忽略“+1”这一部分, 同时根据解集的形式能够判断  $a$  的符号, 再利用根与系数的关系解题即可.

**【解析】**因为关于  $x$  的不等式  $a(x+1)(x-3)+1>0$  ( $a \neq 0$ ) 的解集是  $\{x \mid x_1 < x < x_2, x_1 < x_2\}$ , 所以  $a < 0$ , 且  $x_1, x_2$  是一元二次方程  $ax^2 - 2ax + 1 - 3a = 0$  的两个根, 则  $\Delta = 4a^2 - 4a(1-3a) > 0$ , 解得  $a < 0$  或  $a > \frac{1}{4}$ , 所以  $a < 0$ .

由根与系数的关系可得  $x_1 + x_2 = 2, x_1 x_2 = \frac{1-3a}{a} = \frac{1}{a} - 3 < -3$ .

所以  $-\frac{1}{3} < \frac{1}{x_1 x_2} < 0$ , 所以  $-\frac{2}{3} < \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} =$

$\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{2}{x_1 x_2} < 0$ , 即  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$  的取值范围

是  $\left\{ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \mid -\frac{2}{3} < \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} < 0 \right\}$ .

$$8. \left\{ 3a+2b+c \mid \frac{5}{9} \leq 3a+2b+c < 1 \right\}$$

**攻略上分**

根据一元二次不等式

的解集与对应方程的根的情况, 以及通法攻略 11 的内容, 讨论得出满足题意时根的情况以及字母间的关系.

**【解析】**若不等式  $ax^2 + bx + c \geq 0$  ( $a > 0$ ) 的解集不是  $\mathbf{R}$ , 不妨设  $ax^2 + bx + c = 0$  的根为  $x_3, x_4$  ( $x_3 < x_4$ ), 则  $ax^2 + bx + c \geq 0$  的解集为  $\{x \mid x \leq x_3 \text{ 或 } x \geq x_4\}$ , 依题意, 不等式  $ax^2 + bx + c - 1 \leq 0$  的解集非空, 且方程  $ax^2 + bx + c - 1 = 0$  有两不等实根  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ ), 则  $ax^2 + bx + c - 1 \leq 0$  的解集为  $\{x \mid x_1 \leq x \leq x_2\}$ , 即有  $x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = -\frac{b}{a}$ , 而  $x_1 x_2 \neq x_3 x_4$ , 从而  $x_1, x_2, x_3, x_4$  的大小关系只能为  $x_1 < x_3 < x_4 < x_2$ , 此时不等式的解集为  $\{x \mid x_1 \leq x \leq x_3 \text{ 或 } x_4 \leq x \leq x_2\}$ , 不符合题意, 因此  $ax^2 + bx + c \geq$



$0(a>0)$  的解集是  $\mathbf{R}$ ,  $ax^2+bx+c-1 \leq 0$  的解集是  $\{x \mid -1 \leq x \leq 2\}$ , 于是  $\Delta = b^2 -$

$$4ac \leq 0, \quad \text{且} \quad \begin{cases} -1+2 = -\frac{b}{a}, \\ -1 \times 2 = \frac{c-1}{a}, \end{cases} \quad \text{即}$$

$$\begin{cases} b = -a, \\ c = -2a+1, \end{cases} \quad \text{从而} \Delta = (-a)^2 - 4a \cdot (-2a+1) \leq 0, \text{即} 9a^2 - 4a \leq 0, \text{而} a > 0, \text{解得} 0 <$$

$$a \leq \frac{4}{9}.$$

因为  $3a+2b+c = 3a+2 \cdot (-a) - 2a+1 = -a+1$ , 且  $\frac{5}{9} \leq -a+1 < 1$ , 所以  $3a+2b+c$  的取值

范围是  $\left\{ 3a+2b+c \mid \frac{5}{9} \leq 3a+2b+c < 1 \right\}$ .

$$\text{范围是} \left\{ 3a+2b+c \mid \frac{5}{9} \leq 3a+2b+c < 1 \right\}.$$

## 9. B



### 攻略上分

题中给出的不等式是典型的分式不等式与绝对值不等式, 先应用通法攻略 12 快速解不等式, 再判断充分条件与必要条件.

【解析】由  $\frac{x+1}{2x-1} \geq 2$  得  $\frac{-3x+3}{2x-1} \geq 0$ , 解得

$$\frac{1}{2} < x \leq 1, \text{则} p: \frac{1}{2} < x \leq 1.$$

$$\text{由} |1-x| \leq x \text{ 得} x \geq \frac{1}{2}, \text{则} q: x \geq \frac{1}{2}.$$

故  $p$  是  $q$  的充分不必要条件. 故选 B.

## 10. D



### 攻略上分

本题求分式不等式的解集, 可用通法攻略 12 求解, 解题时先将不等式化成“标准形式”, 再转化为整式不等式. 转化成整式不等式时注意分母不为 0, 同时还需用到高次不等式的求解方法.

$$\text{【解析】由} \frac{y^2-3}{2y-4} - y \geq 0,$$

$$\text{得} \frac{y^2-3-2y^2+4y}{2y-4} \geq 0, \text{所以} \frac{y^2-4y+3}{2y-4} \leq 0,$$

$$\text{所以} \begin{cases} (y^2-4y+3)(2y-4) \leq 0, \\ 2y-4 \neq 0, \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} (y-1)(y-3)(2y-4) \leq 0, \\ 2y-4 \neq 0, \end{cases} \quad \text{解得} y \leq 1$$

或  $2 < y \leq 3$ , 故  $y$  的取值构成的集合为

$\{y \mid y \leq 1 \text{ 或 } 2 < y \leq 3\}$ . 故选 D.



**关键点拨**

分式不等式转化为整式不等式时,要注意等价性,尤其注意分母不能为 0.

**11. B****攻略上分**

本题是分式不等式,可以转化成高次不等式,可以利用通法攻略 12 解决.

【解析】由  $\frac{x^2+5x-6}{x-1} \geq 0$ ,

$$\text{得} \begin{cases} (x^2+5x-6)(x-1) \geq 0, \\ x-1 \neq 0, \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} (x-1)(x+6)(x-1) \geq 0, \\ x-1 \neq 0, \end{cases}$$

解得  $x \geq -6$  且  $x \neq 1$ , 所以原不等式的解集为  $\{x | -6 \leq x < 1 \text{ 或 } x > 1\}$ .

故选 B.

**易错警示**

随意消项致错

本题容易错解成如下情况:

$$\frac{x^2+5x-6}{x-1} = \frac{(x-1)(x+6)}{x-1} = x+6 \geq 0.$$

错误的原因是随意消项,事实上,当  $x-1=0$  时,左侧分式无意义.

此外,随意消项还可能造成丢解的情况,如需要解  $(x-1)^2(x+6) \leq 0$  时,此时容易消去  $(x-1)^2$  项丢失  $x=1$  的解.

**12.  $\{x | -1 < x < 0\}$** **攻略上分**

含绝对值的不等式的求解可以直接利用通法攻略 12 解决.

【解析】由  $\left| \frac{x}{x+1} \right| > \frac{x}{x+1}$  得  $\frac{x}{x+1} > \frac{x}{x+1}$  ①或

$\frac{x}{x+1} < -\frac{x}{x+1}$  ②, 不等式①无解, 由不等式

②解得  $-1 < x < 0$ , 所以原不等式的解集为  $\{x | -1 < x < 0\}$ .

**一题多解**

一个数的绝对值大于它本

身,则这个数小于 0, 即  $\frac{x}{x+1} < 0 \Leftrightarrow$

$-1 < x < 0$ , 所以原不等式的解集为  $\{x | -1 < x < 0\}$ .

**13. D****思路导引**

先利用基本不等式“1”的妙用求出  $x + \frac{y}{4}$  的最小值, 再根据不等式有解转化为关于  $m$  的一元二次不等式后求出  $m$  的取值范围.



【解析】由  $x > 0, y > 0$  且  $\frac{4}{y} + \frac{1}{x} = 1$ , 得  $x +$

$$\frac{y}{4} = \left(x + \frac{y}{4}\right) \left(\frac{4}{y} + \frac{1}{x}\right) = 2 + \frac{4x}{y} + \frac{y}{4x} \geq$$

$$2 + 2\sqrt{\frac{4x}{y} \cdot \frac{y}{4x}} = 4, \text{ 当且仅当 } \frac{4x}{y} = \frac{y}{4x},$$

即  $y = 4x = 8$  时取等号.

由不等式  $x + \frac{y}{4} < m^2 - 3m$  有解, 得  $m^2 -$

$3m > 4$ , 解得  $m < -1$  或  $m > 4$ , 所以  $m$  的取值范围是  $\{m \mid m < -1 \text{ 或 } m > 4\}$ .

**14. C** 【解析】根据题意, 分两种情况讨论.

①当  $a^2 - 4 = 0$ , 即  $a = \pm 2$  时,

若  $a = 2$ , 原不等式为  $4x - 1 \geq 0$ , 解得  $x \geq$

$\frac{1}{4}$ , 不等式的解集为  $\left\{x \mid x \geq \frac{1}{4}\right\}$ , 不

是空集, 符合题意;

若  $a = -2$ , 原不等式为  $-1 \geq 0$ , 无解, 不符合题意.

②当  $a^2 - 4 \neq 0$ , 即  $a \neq \pm 2$  时,

若不等式的解集是空集,

$$\text{则有 } \begin{cases} a^2 - 4 < 0, \\ \Delta = (a+2)^2 + 4(a^2 - 4) < 0, \end{cases}$$

解得  $-2 < a < \frac{6}{5}$ , 则当不等式的解集不为

空集时, 有  $a < -2$  或  $a \geq \frac{6}{5}$  且  $a \neq 2$ .

综上所述, 实数  $a$  的取值范围为

$$\left\{a \mid a < -2 \text{ 或 } a \geq \frac{6}{5}\right\}. \text{ 故选 C.}$$

**易错警示** 忽略二次项系数的讨论而致错

求解含参型一元二次不等式的解集时, 若二次项系数含参, 则需要考虑该系数是否为 0, 我们学习的判别式是与“二次”联系在一起的, 否则容易造成漏解或错解.

**15. BCD** 【解析】当  $k = 1$  时, 由  $2kx^2 + kx -$

$$\frac{3}{8} = 2x^2 + x - \frac{3}{8} < 0, \text{ 解得 } -\frac{3}{4} < x < \frac{1}{4}, \text{ 故}$$

A 错误.

当  $k = 0$  时,  $-\frac{3}{8} < 0$  恒成立; 若不等式

对  $\forall x \in \mathbf{R}$  恒成立, 则当  $k \neq 0$  时,  $2k < 0$

且  $\Delta = k^2 - 4 \times 2k \times \left(-\frac{3}{8}\right) < 0$ , 解得  $-3 < k <$

0. 综上,  $-3 < k \leq 0$ , 则整数  $k$  的取值构成的集合为  $\{-2, -1, 0\}$ , 故 B 正确.



若不等式对  $0 \leq k \leq 1$  恒成立, 则

$(2x^2+x)k - \frac{3}{8} < 0$  在  $0 \leq k \leq 1$  时恒

成立,

$$\text{即} \begin{cases} (2x^2+x) \times 1 - \frac{3}{8} < 0, \\ (2x^2+x) \times 0 - \frac{3}{8} < 0, \end{cases} \quad \text{解得} -\frac{3}{4} < x <$$

$\frac{1}{4}$ , 故 C 正确.

若恰有一个整数  $x$  使得不等式成立, 则

$k > 0$ . 又因为  $-\frac{3}{8} < 0$ , 且函数  $y =$

$2kx^2+kx-\frac{3}{8}$  的图象的对称轴为直线  $x =$

$-\frac{k}{4k} = -\frac{1}{4}$ , 所以该整数解为  $x=0$ , 结合

二次函数  $y = 2kx^2+kx-\frac{3}{8}$  的图象, 可得

$$\begin{cases} 3k - \frac{3}{8} \geq 0, \\ k - \frac{3}{8} \geq 0, \end{cases} \quad \text{解得} k \geq \frac{3}{8}, \text{故 D 正确. 故}$$

选 BCD.

## 16.5



### 思路导引

根据给定条件, 按  $a < 2, a > 2$  分类求出解集, 进而求出  $a$  的值.

**【解析】** 不等式  $x^2 - (a+2)x + 2a < 0 \Leftrightarrow (x-a)(x-2) < 0$ , 显然  $a \neq 2$ , 否则原不等式的解集为空集.

当  $a < 2$  时, 解得  $a < x < 2$ , 要使原不等式的解集中恰有两个整数,  $a$  必小于 0, 与  $a$  为正整数矛盾.

因此  $a > 2$ , 解得  $2 < x < a$ , 要使原不等式的解集中恰有两个整数, 则  $4 < a \leq 5$ , 所以正整数  $a$  的值为 5.

## 17. $\left\{ \frac{6\sqrt{2}-4}{7} \right\}$



### 思路导引

当  $a \leq -1$  时, 借助函数  $y = x^2 - 2ax - 1$  的性质分析即可; 当  $a > -1$  时, 由于  $x = \frac{3}{a+1} > 0$ , 故  $x = \frac{3}{a+1}$  必定是方程  $x^2 - 2ax - 1 = 0$  的一个正根, 代入即可求解.

**【解析】** 因为  $x > 0$ , 所以原式可等价于  $[(a+1)x-3](x^2-2ax-1) \geq 0$  恒成立.

由题意得, 当  $a \leq -1$  时, 因为  $x > 0$ , 则  $(a+1)x-3 < 0$ .



由于  $y = x^2 - 2ax - 1$  的图象开口向上且过点  $(0, -1)$ , 则  $[(a+1)x - 3](x^2 - 2ax - 1) \geq 0$  不恒成立.

当  $a > -1$  时, 由  $(a+1)x - 3 = 0$  解得  $x = \frac{3}{a+1} > 0$ .

由于  $\Delta = 4a^2 + 4 > 0$ , 故方程  $x^2 - 2ax - 1 = 0$  有两个异号的实数根, 所以  $x = \frac{3}{a+1}$  必定是方程  $x^2 - 2ax - 1 = 0$  的一个正根, 则  $\left(\frac{3}{a+1}\right)^2 - 2a \cdot \frac{3}{a+1} - 1 = 0, a > -1$ , 解得  $a = \frac{6\sqrt{2}-4}{7}$ .

**18. B** 【解析】在  $\triangle ABC$  中,  $\angle A = 90^\circ, AB = AC$ , 则  $\triangle ABC$  为等腰直角三角形.

由  $AD = x$  米, 得  $EF = FC = AD = x$  米,  $FA = (200 - x)$  米, 依题意有  $x(200 - x) \geq 7500$ , 解得  $50 \leq x \leq 150$ ,

即  $AD$  的长度  $x$  (单位: 米) 的范围是  $\{x | 50 \leq x \leq 150\}$ . 故选 B.

**19. 【解】** (1) 降低税率后的税率为  $(10 - x)\%$ , 农产品的收购量为  $a(1 + 2x\%)$  万担, 收购总金额为  $200a(1 + 2x\%)$  万元.

依题意得  $y = 200a(1 + 2x\%)(10 - x)\% = \frac{1}{50}a(100 + 2x)(10 - x) (0 < x < 10)$ .

(2) 原税收为  $200a \times 10\% = 20a$  (万元).

依题意得  $\frac{1}{50}a(100 + 2x)(10 - x) \geq 20a \times 83.2\%$ , 化简得  $x^2 + 40x - 84 \leq 0$ , 解得  $-42 \leq x \leq 2$ .

又因为  $0 < x < 10$ , 所以  $0 < x \leq 2$ , 即  $x$  的取值范围为  $\{x | 0 < x \leq 2\}$ .

### 方法总结 解决一元二次不等式实际问题的步骤

(1) 设未知数, 列一元二次不等式;

(2) 化成标准形式:  $ax^2 + bx + c > 0$  或  $ax^2 + bx + c < 0$  (不等号也可以为“ $\geq$ ”或“ $\leq$ ”), 其中  $a > 0$ ;

(3) 解方程  $ax^2 + bx + c = 0$ ;

(4) 画出函数  $y = ax^2 + bx + c$  的图象;

(5) 借助图象求一元二次不等式的解集, 并合理取舍;

(6) 下结论, 写明答案, 注意有无单位.



## 能力上分

1. B 【解析】 $x^2 - 7x + 10 \leq 0 \Rightarrow (x-2)(x-5) \leq 0 \Rightarrow 2 \leq x \leq 5$ .

若  $1 \leq x \leq 5$  成立, 则  $2 \leq x \leq 5$  不一定成立, 即充分性不成立;

若  $2 \leq x \leq 5$  成立, 则  $1 \leq x \leq 5$  一定成立, 即必要性成立.

所以“ $1 \leq x \leq 5$ ”是“ $x^2 - 7x + 10 \leq 0$ ”的必要不充分条件. 故选 B.

2. D 【解析】根据题意可得  $(40+x) \cdot (300-5x) > 12\,495$ , 整理得  $x^2 - 20x + 99 < 0$ , 解得  $9 < x < 11$ .

又  $x \in \mathbf{N}^*$ , 所以  $x = 10$ , 所以该店铺的“叫花鸡”每只定价应为  $40+10=50$ (元). 故选 D.

3. AC 【解析】依题意可得方程  $ax^2 + bx + c = 0$  的两根分别为  $x_1 = -2$  和  $x_2 = 1$ , 且  $a > 0$ .

由根与系数的关系可得

$$\begin{cases} -2+1 = -\frac{b}{a} = -1, \\ -2 \times 1 = \frac{c}{a} = -2, \end{cases} \quad \text{即 } b=a, c=-2a.$$

对于 A, 由  $a > 0$  可得  $b=a > 0, c=-2a < 0$ , 即 A 正确;

对于 B, 易知  $4a+2b+c=4a > 0$ , 即 B 错误;

对于 C, 不等式  $bx+c > 0$  即为  $ax-2a > 0$ , 由  $a > 0$  得  $x > 2$ , 所以不等式  $bx+c > 0$  的解集为  $\{x | x > 2\}$ , 即 C 正确;

对于 D, 不等式  $cx^2 - bx + a < 0$  即为  $-2ax^2 - ax + a < 0$ , 即  $2x^2 + x - 1 > 0$ , 所以  $(2x-1)(x+1) > 0$ , 解得  $x > \frac{1}{2}$  或  $x < -1$ , 即不等式的解集为  $\left\{x \mid x < -1 \text{ 或 } x > \frac{1}{2}\right\}$ , 即 D 错误. 故选 AC.

4. ACD 【解析】对于一元二次不等式  $a(x-a)(x+1) > 0$ ,

当  $a > 0$  时, 函数  $y = a(x-a)(x+1)$  的图象开口向上, 与  $x$  轴的交点为  $(a, 0), (-1, 0)$ , 故不等式的解集为  $\{x | x < -1 \text{ 或 } x > a\}$ .

当  $a < 0$  时, 函数  $y = a(x-a)(x+1)$  的图象开口向下, 若  $a = -1$ , 不等式的解集为  $\emptyset$ ;

若  $-1 < a < 0$ , 不等式的解集为  $\{x | -1 < x < a\}$ ; 若  $a < -1$ , 不等式的解集为  $\{x | a < x < -1\}$ .



$-1\}$ . 故选 ACD.

**5. ACD** 【解析】因为关于  $x$  的不等式

$$ax^2 + 4x + 2b \leq 0 (a \neq 0) \text{ 的解集为 } \left\{ -\frac{2}{a} \right\},$$

所以  $a > 0$ , 且  $\Delta = 16 - 8ab = 0$ , 即  $ab = 2$ , 故 A 正确, B 错误;

因为  $a > 0$ , 且  $ab = 2$ , 所以  $b > 0$ ,  $a + 2b \geq 2\sqrt{2ab} = 4$ , 当且仅当  $a = 2b$ , 即  $a = 2, b = 1$  时,  $a + 2b$  取得最小值 4, 故 C 正确;

若  $a > b$ , 则  $a - b > 0$ , 则  $\frac{a^2 + b^2}{a - b} =$

$$\frac{(a - b)^2 + 2ab}{a - b} = (a - b) + \frac{4}{a - b} \geq 2\sqrt{4} = 4, \text{ 当}$$

且仅当  $a - b = 2$ , 即  $a = 1 + \sqrt{3}, b = -1 + \sqrt{3}$  时, 等号成立, 故 D 正确. 故选 ACD.

**6.  $\left\{ m \mid m < -\frac{4}{3} \text{ 或 } m > 1 \right\}$**  【解析】由已知可

得  $x + 2(y + 1) = 6$ , 所以  $\frac{2}{x} + \frac{1}{y+1} =$

$$\left( \frac{2}{x} + \frac{1}{y+1} \right) \cdot \frac{1}{6} [x + 2(y + 1)] = \frac{1}{6} \left[ 4 + \right.$$

$$\left. \frac{4(y+1)}{x} + \frac{x}{y+1} \right] \geq \frac{1}{6} \left( 4 + \right.$$

$$\left. 2\sqrt{\frac{4(y+1)}{x} \cdot \frac{x}{y+1}} \right) = \frac{4}{3}, \text{ 当且仅当}$$

$$\begin{cases} \frac{4(y+1)}{x} = \frac{x}{y+1}, \\ x + 2(y+1) = 6, \\ x > 0, y > 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} x = 3, \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ 时取等号.}$$

因为不等式  $m^2 + \frac{1}{3}m > \frac{2}{x} + \frac{1}{y+1}$  有解, 所

以  $m^2 + \frac{1}{3}m > \frac{4}{3}$ , 即  $3m^2 + m - 4 > 0$ , 即

$$(3m + 4)(m - 1) > 0, \text{ 解得 } m < -\frac{4}{3} \text{ 或 } m > 1,$$

所以  $m$  的取值范围为  $\left\{ m \mid m < -\frac{4}{3} \right.$

$\left. \text{或 } m > 1 \right\}$ .

**7. 3  $\left\{ a \mid \frac{11}{2} \leq a < \frac{31}{5} \right\}$**  【解析】由题意得

$$\Delta = a^2 - 24 > 0, \text{ 即 } a > 2\sqrt{6}.$$

设不等式的解集为  $\{x \mid x_1 \leq x \leq x_2\}$ ,

则  $x_1 + x_2 = a, x_1 \cdot x_2 = 6$ , 则  $x_2 - x_1 =$

$$\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2} = \sqrt{a^2 - 24}.$$

因为不等式的解集中有且仅有 3 个整

数, 所以  $2 \leq x_2 - x_1 < 4$ , 即  $2 \leq \sqrt{a^2 - 24} < 4$ ,

解得  $2\sqrt{7} \leq a < 2\sqrt{10}$ , 所以  $y = x^2 - ax + 6$



的图象的对称轴为直线  $x = \frac{a}{2}$ , 满足

$$\sqrt{7} \leq x = \frac{a}{2} < \sqrt{10}.$$

而  $\sqrt{7} < 3 < \sqrt{10}$ , 即离对称轴距离最近的整数只有 3, 所以  $n=3$ , 所以三个整数解

$$\text{为 } 2, 3, 4, \text{ 所以 } \begin{cases} 2\sqrt{7} \leq a < 2\sqrt{10}, \\ 4-2a+6 \leq 0, \\ 1-a+6 > 0, \\ 16-4a+6 \leq 0, \\ 25-5a+6 > 0, \end{cases}$$

解得  $\frac{11}{2} \leq a < \frac{31}{5}$ , 即  $a$  的取值范围

$$\text{为 } \left\{ a \mid \frac{11}{2} \leq a < \frac{31}{5} \right\}.$$

## 8.2



### 思路导引

令  $x=1$ , 得  $a+b+c=4$ , 再根据  $\forall x \in \mathbf{R}, 2x+2 \leq ax^2+bx+c$  恒成立, 解得  $a, b, c$  的值, 最后验证  $ax^2+bx+c \leq 2x^2-2x+4$  恒成立即可.

【解析】令  $x=1$ , 则  $4 \leq a+b+c \leq 4$ , 故  $a+b+c=4$ .

由  $\forall x \in \mathbf{R}, 2x+2 \leq ax^2+bx+c$  恒成立, 得  $ax^2+(b-2)x+c-2 \geq 0$  恒成立.

当  $a=0$  时, 要使  $ax^2+(b-2)x+c-2 \geq 0$  恒成立, 则  $b=2, c=2$ , 此时  $2x^2-2x+4-(ax^2+bx+c)=2x^2-2x+4-(2x+2)=2(x-1)^2 \geq 0$  恒成立,  $4a^2+b^2=0+2^2=4$ .

当  $a \neq 0$  时, 要使  $ax^2+(b-2)x+c-2 \geq 0$  恒成立, 则  $a > 0, \Delta = (b-2)^2 - 4a(c-2) = (a+c-2)^2 - 4a(c-2) = (a-c+2)^2 \leq 0$ , 所以  $c=a+2$ , 此时  $b=2-2a$ , 所以  $4a^2+b^2 = 4a^2 + (2-2a)^2 = 8a^2 - 8a + 4 = 8\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + 2 \geq 2$ , 当且仅当  $a = \frac{1}{2}, b = 1, c = \frac{5}{2}$  时取等号.

当  $a = \frac{1}{2}, b = 1, c = \frac{5}{2}$  时,  $2x^2-2x+4-(ax^2+bx+c) = 2x^2-2x+4-\left(\frac{1}{2}x^2+x+\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}x^2-3x+\frac{3}{2} = \frac{3}{2}(x-1)^2 \geq 0$  恒成立, 所以  $4a^2+b^2$  的最小值为 2.

## 9. $\frac{3}{m}$



### 思路导引

变形给定不等式, 转化成一元二次不等式组, 进而求出解集.



【解析】当  $m > 0$  时,  $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} \geq m \Leftrightarrow$

$$\frac{mx^2 - (3+3m)x + 2m+4}{(x-1)(x-2)} \leq 0.$$

设  $y = mx^2 - (3+3m)x + 2m+4$ , 则  $\Delta = 9(m+1)^2 - 8m(m+2) = m^2 + 2m + 9 > 0$ .

令  $y = 0$  的两根为  $x_1, x_2$ , 且  $x_1 < x_2$ ,

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{3+3m}{m} = 3 + \frac{3}{m},$$

$$\text{则 } \frac{m(x-x_1)(x-x_2)}{(x-1)(x-2)} \leq 0,$$

$$\text{因此 } \begin{cases} (x-x_1)(x-x_2) \leq 0, \\ (x-1)(x-2) > 0 \end{cases}$$

$$\text{或 } \begin{cases} (x-x_1)(x-x_2) \geq 0, \\ (x-1)(x-2) < 0. \end{cases}$$

而当  $x = 1$  时,  $y = m - 3 - 3m + 2m + 4 = 1 > 0$ ,

当  $x = 2$  时,  $y = 4m - 6 - 6m + 2m + 4 = -2 < 0$ ,

于是  $1 < x_1 < 2 < x_2$ ,

$$\text{解 } \begin{cases} (x-x_1)(x-x_2) \leq 0, \\ (x-1)(x-2) > 0, \end{cases} \text{ 得 } 2 < x \leq x_2,$$

$$\text{解 } \begin{cases} (x-x_1)(x-x_2) \geq 0, \\ (x-1)(x-2) < 0, \end{cases} \text{ 得 } 1 < x \leq x_1, \text{ 则不}$$

等式  $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} \geq m (m > 0)$  的解集为

$\{x \mid 1 < x \leq x_1 \text{ 或 } 2 < x \leq x_2\}$ , 所以  $l = x_1 -$

$$1 + x_2 - 2 = x_1 + x_2 - 3 = 3 + \frac{3}{m} - 3 = \frac{3}{m}.$$

10.



思路导引

(1) 根据题意得

$[x] \leq x < [x] + 1$ , 然后解不等式即可;

(2) 将  $\forall x \in \left\{x \mid 1 \leq x \leq \frac{7}{2}\right\}$ ,

$[x]^2 - m[x] + 4 > 0$  恒成立转化为

$\forall x \in \left\{x \mid 1 \leq x \leq \frac{7}{2}\right\}, m < [x] +$

$\frac{4}{[x]}$  恒成立, 然后利用基本不等式求

最值即可;

(3) 分  $a = 0, a > 0, a < 0$  三种情况讨论即可.

【解】(1) 由题意得  $[x] \leq x < [x] + 1$ , 且  $[x] \in \mathbf{Z}$ .

因为  $-\frac{5}{2} \leq [x] \leq \frac{5}{2}$ , 即  $-2 \leq [x] \leq 2$ ,

所以  $-2 \leq x < 3$ , 故  $-\frac{5}{2} \leq [x] \leq \frac{5}{2}$  的解集为  $\{x \mid -2 \leq x < 3\}$ .

又  $2[x]^2 - 11[x] + 15 \leq 0$ , 即  $([x] -$





$$3)(2[x]-5) \leq 0,$$

所以  $\frac{5}{2} \leq [x] \leq 3$ , 则  $[x] = 3$ , 所以

$$3 \leq x < 4,$$

所以  $2[x]^2 - 11[x] + 15 \leq 0$  的解集为  $\{x \mid 3 \leq x < 4\}$ .

(2)  $\forall x \in \left\{x \mid 1 \leq x \leq \frac{7}{2}\right\}$ ,  $[x]^2 - m[x] + 4 > 0$  恒成立, 即  $1 \leq [x] \leq 3$ ,  $m < [x] + \frac{4}{[x]}$  恒成立.

又  $[x] + \frac{4}{[x]} \geq 4$ , 当且仅当  $[x] = 2$ ,

即  $2 \leq x < 3$  时, 等号成立, 故  $[x] + \frac{4}{[x]}$  的最小值为 4,

所以  $m < 4$ , 故  $m$  的取值范围为  $\{m \mid m < 4\}$ .

(3) 不等式  $[x]^2 - 2[x] - a^2 + 1 \leq 0$ , 即  $([x] + a - 1)([x] - a - 1) \leq 0$ .

①若  $a = 0$ , 不等式为  $[x]^2 - 2[x] + 1 \leq 0$ , 即  $[x] = 1$ , 此时  $1 \leq x < 2$ , 显然不符合题意.

②若  $a > 0$ , 则  $1 - a < 1 + a$ , 由  $([x] + a - 1) \cdot ([x] - a - 1) \leq 0$ , 解得  $1 - a \leq [x] \leq 1 + a$ .

因为不等式的解集为  $\{x \mid 1 - a \leq [x] \leq 1 + a\} = \{x \mid 0 \leq x < 3\} = \{x \mid -1 < [x] < 3\}$ ,

所以  $\begin{cases} -1 < 1 - a \leq 0, \\ 2 \leq 1 + a < 3, \end{cases}$  解得  $1 \leq a < 2$ .

③若  $a < 0$ , 则  $1 + a < 1 - a$ , 由  $([x] + a - 1)([x] - a - 1) \leq 0$ , 解得  $1 + a \leq [x] \leq 1 - a$ .

因为不等式的解集为  $\{x \mid 1 + a \leq [x] \leq 1 - a\} = \{x \mid 0 \leq x < 3\} = \{x \mid -1 < [x] < 3\}$ ,

所以  $\begin{cases} -1 < 1 + a \leq 0, \\ 2 \leq 1 - a < 3, \end{cases}$  解得  $-2 < a \leq -1$ .

综上所述,  $a$  的取值范围是  $\{a \mid -2 < a \leq -1 \text{ 或 } 1 \leq a < 2\}$ .

### 方法技巧

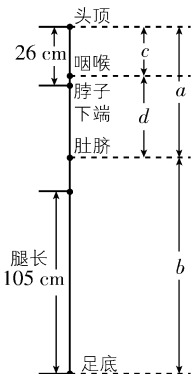
对于恒成立问题, 常用到以下两个结论: (1)  $a > y$  恒成立  $\Leftrightarrow a > y_{\max}$ ; (2)  $a < y$  恒成立  $\Leftrightarrow a < y_{\min}$ .

## 真题上分

1. B 【解析】如图, 设“某人”头顶至肚脐



的长度为  $a$  cm, 肚脐至足底的长度为  $b$  cm, 头顶至咽喉的长度为  $c$  cm, 咽喉至肚脐的长度为  $d$  cm.



$$\text{则 } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618,$$

$$c < 26, b > 105, c + d = a.$$

设“某人”的身高为  $h$  cm, 即  $a + b = h$ .

$$\text{由 } \begin{cases} b > 105, \\ a \approx 0.618b, \end{cases} \text{ 解得 } a > 64.89,$$

$$\text{由 } \begin{cases} c < 26, \\ c \approx 0.618d, \end{cases} \text{ 解得 } d < 42.07,$$

所以  $c + d < 26 + 42.07 = 68.07$ , 即  $a < 68.07$ .

$$\begin{cases} a < 68.07, \\ a \approx 0.618b, \end{cases} \text{ 解得 } b < 110.15.$$

整理可得  $64.89 + 105 < a + b < 68.07 + 110.15$ , 即  $169.89 < h < 178.22$ , 结合选项可知其身高可能是 175 cm, 故选 B.

**一题多解** 若以 26 为头顶到咽喉的

长度, 则身高为  $\left(26 + 26 \times \frac{2}{\sqrt{5}-1}\right) \times \left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}-1}\right) = 26 \times \left(1 + \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 \approx 178(\text{cm})$ .

若以 105 为肚脐到足底的长度, 则身

高为  $105 \times \left(1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = 105 \times \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 170(\text{cm})$ .

结合选项可知其身高可能是 175 cm, 故选 B.

**关键点拨** 本题解答的关键: (1) 设

出相关几何量, 利用黄金分割的条件建立方程组; (2) 利用不等式的性质得到相关几何量的取值范围.



## 2. BC



## 思路导引

对于 A, B, 由条件,

得  $(x+y)^2 - 3xy = 1$ , 将  $xy = \frac{(x+y)^2}{4} -$

$\frac{(x-y)^2}{4}$  代入  $\longrightarrow 1 = \frac{(x+y)^2}{4} +$

$\frac{3(x-y)^2}{4} \longrightarrow$  利用放缩法可求得  $x+y$

的范围;

对于 C, 由条件, 得  $x^2 + y^2 - 1 = xy \longrightarrow$   
利用基本不等式求解即可;

对于 D, 取特殊值验证即可.

【解析】对于 A, B, 由  $x^2 + y^2 - xy = 1$ , 得

$(x+y)^2 - 3xy = 1$ , 而  $xy = \frac{(x+y)^2}{4} -$

$\frac{(x-y)^2}{4}$ , 所以  $(x+y)^2 - 3 \left[ \frac{(x+y)^2}{4} -$

$\frac{(x-y)^2}{4} \right] = 1$ , 即  $1 = \frac{(x+y)^2}{4} + \frac{3(x-y)^2}{4} \geq$

$\frac{(x+y)^2}{4}$ , 所以  $-2 \leq x+y \leq 2$ , 所以 A 不正

确, B 正确;

对于 C, D, 由  $x^2 + y^2 - xy = 1$ , 得  $x^2 + y^2 -$

$1 = xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$ , 当且仅当  $x = y$  时等号成

立, 所以  $x^2 + y^2 \leq 2$ , 所以 C 正确;

当  $x = \frac{\sqrt{3}}{3}, y = -\frac{\sqrt{3}}{3}$  时,  $x^2 + y^2 < 1$ , 所以 D 不

正确. 故选 BC.

3. A 【解析】因为  $a > 0, b > 0$ , 所以  $a + b \geq$

$2\sqrt{ab}$ , 当且仅当  $a = b$  时取等号. 又  $a > b$ ,

所以  $a + b > 2\sqrt{ab}$ , 故 A 正确, B 错误;

$\frac{a}{2} + 2b \geq 2\sqrt{\frac{a}{2} \cdot 2b} = 2\sqrt{ab}$ , 当且仅当

$\frac{a}{2} = 2b$ , 即  $a = 4b$  时取等号, 故 C, D 错

误. 故选 A.

4.  $2\sqrt{2}$  【解析】由题意可知,  $\frac{1}{a} + \frac{a}{b^2} + b \geq$

$2\sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{a}{b^2}} + b = \frac{2}{b} + b \geq 2\sqrt{\frac{2}{b} \cdot b} =$

$2\sqrt{2}$ , 当且仅当  $\frac{1}{a} = \frac{a}{b^2}$  时, 第一个不等号

中的等号成立, 当且仅当  $\frac{2}{b} = b$  时, 第二

个不等号中的等号成立, 即  $a = b = \sqrt{2}$  时,



等号同时成立,所以  $\frac{1}{a} + \frac{a}{b^2} + b$  的最小值为  $2\sqrt{2}$ .

**5.4 【解析】**由已知得,  $\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{8}{a+b} = \frac{ab}{2a} +$

$$\frac{ab}{2b} + \frac{8}{a+b} = \frac{a+b}{2} + \frac{8}{a+b} \geq 2\sqrt{\frac{a+b}{2} \cdot \frac{8}{a+b}} = 4,$$

当且仅当  $\frac{a+b}{2} = \frac{8}{a+b}$  且  $ab = 1$ , 即

$$\begin{cases} a=2+\sqrt{3}, \\ b=2-\sqrt{3} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=2-\sqrt{3}, \\ b=2+\sqrt{3} \end{cases} \text{ 时取等号, 故}$$

$\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{8}{a+b}$  的最小值为 4.

### 一题多解

方法一: 由已知得,  $\frac{1}{2a} +$

$$\frac{1}{2b} + \frac{8}{a+b} = \frac{a+b}{2ab} + \frac{8}{a+b} = \frac{a+b}{2} + \frac{8}{a+b}, \text{ 下同}$$

上述方法.

方法二: 因为  $a > 0, b > 0$ , 且  $ab = 1$ , 所

$$\text{以 } b = \frac{1}{a}, \text{ 于是 } \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{8}{a+b} = \frac{1}{2a} + \frac{a}{2} +$$

$$\frac{8}{a+\frac{1}{a}} = \frac{1}{2} \left( a + \frac{1}{a} \right) + \frac{8}{a+\frac{1}{a}} \geq$$

$$2\sqrt{\frac{1}{2} \left( a + \frac{1}{a} \right) \cdot \frac{8}{a+\frac{1}{a}}} = 4, \text{ 当且仅}$$

$$\text{当 } \frac{1}{2} \left( a + \frac{1}{a} \right) = \frac{8}{a+\frac{1}{a}}, \text{ 即}$$

$$\begin{cases} a=2+\sqrt{3}, \\ b=2-\sqrt{3} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=2-\sqrt{3}, \\ b=2+\sqrt{3} \end{cases} \text{ 时取等号,}$$

故  $\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{8}{a+b}$  的最小值为 4.

**6. 【证明】**(1) 由题设可知,  $a, b, c$  均不为

$$\text{零, 所以 } ab+bc+ca = \frac{1}{2}[(a+b+c)^2 - (a^2 +$$

$$b^2 + c^2)] = -\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) < 0.$$

(2) 不妨设  $\max\{a, b, c\} = a$ ,

因为  $abc = 1, a = -(b+c)$ , 所以  $a > 0, b < 0, c < 0$ .

$$\text{由 } bc \leq \frac{(b+c)^2}{4}, \text{ 可得 } abc \leq \frac{a^3}{4}, \text{ 故 } a \geq \sqrt[3]{4},$$

所以  $\max\{a, b, c\} \geq \sqrt[3]{4}$ .

**关键点拨**

本题第(2)问由于涉及  $\max\{a, b, c\}$ , 因此可先设出其最大值为  $a$ , 利用  $abc = 1, a = -(b+c)$  判断出  $a > 0, b < 0, c < 0$ , 结合  $bc \leq \frac{(b+c)^2}{4}$ , 然后变形求出  $a$  的范围.

7. C 【解析】由  $x^2 - x - 6 \geq 0$ , 得  $x \leq -2$  或  $x \geq 3$ , 则  $N = \{x | x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 3\}$ .  
 $\therefore M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}, \therefore M \cap N = \{-2\}$ .  
 故选 C.

8.  $\{x | -1 < x < 3\}$  【解析】 $x^2 - 2x - 3 < 0$ ,  
 即  $(x-3)(x+1) < 0$ , 解得  $-1 < x < 3$ ,  
 所以原不等式的解集为  $\{x | -1 < x < 3\}$ .

**素养上分**

1. A 【解析】由题意得  $h = 11t - 5t^2$ , 令  $h = 11t - 5t^2 \geq 2$ , 即  $5t^2 - 11t + 2 \leq 0$ , 解得  $0.2 \leq t \leq 2$ , 所以排球在抛出点上方 2 m 处及以上的位置最多停留的时间为  $2 - 0.2 = 1.8$  (s).

2. A 【解析】设 1 枝红玫瑰和 1 枝黄玫瑰的价格分别为  $x$  元,  $y$  元, 由题意可得

$$\begin{cases} 6x + 3y > 24, \\ 4x + 5y < 22. \end{cases} \quad (*)$$

令  $2x - 3y = m(6x + 3y) + n(4x + 5y) = (6m + 4n)x + (3m + 5n)y$ ,

$$\text{则} \begin{cases} 6m + 4n = 2, \\ 3m + 5n = -3, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} m = \frac{11}{9}, \\ n = -\frac{4}{3}, \end{cases}$$

所以  $2x - 3y = \frac{11}{9}(6x + 3y) - \frac{4}{3}(4x + 5y)$ .

由 (\*) 得  $\frac{11}{9}(6x + 3y) > \frac{11}{9} \times 24$ ,

$-\frac{4}{3}(4x + 5y) > -\frac{4}{3} \times 22$ , 所以  $\frac{11}{9}(6x +$

$3y) - \frac{4}{3}(4x + 5y) > \frac{11}{9} \times 24 - \frac{4}{3} \times 22 = 0$ , 所

以  $2x - 3y > 0$ , 因此  $2x > 3y$ , 所以 2 枝红玫瑰贵. 故选 A.

3.  $\frac{4}{9}$

**思路导引**

令  $t = \max\{a, b, c\}$ , 分  $t = a, t = b, t = c$  三种情况, 结合一元二次方程的解法分别求解即可.

$$\text{【解析】由题意可得} \begin{cases} a + b + c = 1, \\ a \neq 0, \\ b^2 - 4ac \geq 0. \end{cases} \quad \textcircled{1}$$



令  $t = \max\{a, b, c\}$ .

若  $t = a$ , 则  $a \geq b$ , 且  $a \geq c$ , 则  $3a \geq a + b + c = 1$ , 即  $a \geq \frac{1}{3}$ .

由①式消去  $c$ , 得  $b^2 - 4a(1 - a - b) = b^2 + 4ab + 4a^2 - 4a \geq 0$ , 即  $(b + 2a)^2 \geq 4a$ , 即  $b \leq -2a - 2\sqrt{a}$  或  $b \geq -2a + 2\sqrt{a}$ , 所以  $a \geq -2a + 2\sqrt{a}$ , 解得  $a \geq \frac{4}{9}$ , 当  $(a, b, c) = \left(\frac{4}{9}, \frac{4}{9}, \frac{1}{9}\right)$  时等号成立, 故  $t \geq \frac{4}{9}$ .

若  $t = b$ , 则  $b \geq c$ , 且  $b \geq a$ , 则  $3b \geq a + b + c = 1$ , 即  $b \geq \frac{1}{3}$ .

由①式消去  $c$ , 得  $b^2 - 4a(1 - a - b) = b^2 + 4ab + 4a^2 - 4a \geq 0$ , 即  $(2a - 1 + b)^2 \geq 1 - 2b$ , ②

当  $b \geq \frac{1}{2}$  时, ②式恒成立, 当  $\frac{1}{3} \leq b < \frac{1}{2}$

时, 由②式得  $a \leq \frac{1 - b - \sqrt{1 - 2b}}{2}$  或  $a \geq$

$\frac{1 - b + \sqrt{1 - 2b}}{2}$ , 所以  $b \geq \frac{1 - b + \sqrt{1 - 2b}}{2}$ , 解

得  $\frac{4}{9} \leq b < \frac{1}{2}$ , 故  $b \geq \frac{4}{9}$ , 当  $(a, b, c) =$

$\left(\frac{4}{9}, \frac{4}{9}, \frac{1}{9}\right)$  时, 等号成立, 所以  $t \geq \frac{4}{9}$ .

若  $t = c$ , 则  $c \geq a$ , 且  $c \geq b$ , 则  $3c \geq a + b + c = 1$ , 即  $c \geq \frac{1}{3}$ ,

由①式消去  $a$ , 整理得  $b^2 - 4c(1 - b - c) = b^2 + 4bc + 4c^2 - 4c \geq 0$ , 即  $(b + 2c)^2 \geq 4c$ , 即

$b \leq -2c - 2\sqrt{c}$  或  $b \geq -2c + 2\sqrt{c}$ , 所以  $c \geq -2c + 2\sqrt{c}$ , 解得  $c \geq \frac{4}{9}$ , 当  $(a, b, c) =$

$\left(\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{4}{9}\right)$  时, 等号成立, 故  $t \geq \frac{4}{9}$ .

综上所述,  $t \geq \frac{4}{9}$ , 等号成立时,  $(a,$

$b, c) = \left(\frac{4}{9}, \frac{4}{9}, \frac{1}{9}\right)$  或  $(a, b, c) =$

$\left(\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{4}{9}\right)$ , 故  $t_{\min} = \frac{4}{9}$ .

4. 【解】(1) 设正方形  $GFEB$  的边长为  $x (x \geq d)$ , 由题可知  $\triangle AGF$  与  $\triangle FEC$  相

似, 所以  $\frac{b-x}{x} = \frac{x}{a-x}$ , 解得  $x = \frac{ab}{a+b}$ .

因为  $a = 5, x \geq d$ , 显然  $d < 5$ , 所以  $\frac{5b}{5+b} \geq d$ ,



$$\text{所以 } b \geq \frac{5d}{5-d}.$$

$$\text{故 } b \text{ 的取值范围为 } \left\{ b \mid b \geq \frac{5d}{5-d} \right\}.$$

(2)  $BM \geq BF$ . 理由如下:

$$\text{由题可知 } BM = \frac{1}{2}AC = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}, \text{ 由 (1)}$$

$$\text{可知, } BF = \sqrt{2}BE = \frac{\sqrt{2}ab}{a+b},$$

$$\text{则 } BM = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} \geq \frac{\sqrt{2ab}}{2}, BF = \frac{\sqrt{2}ab}{a+b} \leq$$

$$\frac{\sqrt{2}ab}{2\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{2ab}}{2}, \text{ 故 } BM \geq BF, \text{ 当且仅当}$$

$a=b$  时, 等号成立.

(3) 由 (1) 可知正方形  $GFEB$  的边长

$$BE = \frac{ab}{a+b}, \text{ 所以正方形 } GFEB \text{ 的面积}$$

$$\text{为 } \frac{a^2b^2}{(a+b)^2}.$$

设正方形  $D'G'F'E'$  的边长为  $y$ ,  $\angle A = \alpha$ ,

易知  $\angle BD'E' = \angle CE'F' = \angle A = \alpha$ , 所以

$$a = BE' + CE' = y \sin \alpha + \frac{y}{\cos \alpha}, \text{ 所以}$$

$$y = \frac{a}{\sin \alpha + \frac{1}{\cos \alpha}}.$$

$$\text{显然 } \sin \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \cos \alpha = \frac{AB}{AC} =$$

$$\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \text{ 所以 } y = \frac{a}{\sin \alpha + \frac{1}{\cos \alpha}} =$$

$$\frac{ab \sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2+ab}, \text{ 所以正方形 } D'G'F'E' \text{ 的面}$$

$$\text{积为 } \frac{a^2b^2(a^2+b^2)}{(a^2+b^2+ab)^2}.$$

因为  $a^2b^2 > 0$ , 所以  $(a+b)^4 - 2ab(a+b)^2 +$

$a^2b^2 > (a+b)^4 - 2ab(a+b)^2$ , 则  $[(a+b)^2 -$

$ab]^2 > (a+b)^2 [(a+b)^2 - 2ab]$ , 则  $(a^2 +$

$b^2 + ab)^2 > (a+b)^2 (a^2 + b^2)$ , 则  $a^2 + b^2 +$

$$ab > (a+b) \sqrt{a^2+b^2}, \text{ 则 } \frac{1}{a+b} > \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2+ab}, \text{ 则}$$

$$\frac{ab}{a+b} > \frac{ab \sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2+ab}.$$

所以  $BE > y$ , 所以正方形  $GFEB$  的面积大

于正方形  $D'G'F'E'$  的面积.

**关键点拨**

(1) 利用图形相似找到边之间的关系; (2) 利用  $a, b$  表示线段  $BM$  与  $BF$  的长度后, 根据两者的关系利用基本不等式求解即可; (3) 当求出两个正方形面积后, 我们可以先比较两者不同的部分, 只需要化简比较不同部分的大小, 要注意需要将  $(a+b)^2$  看成一个整体.

**5. A 【解析】** 由题意得  $b+c \geq a$ , 则  $\frac{c}{a+b} +$

$$\frac{b}{c} = \frac{c}{a+b} + \frac{b+c}{c} - 1 = \frac{c}{a+b} + \frac{b+c+b+c}{2c} - 1 \geq$$

$$\frac{c}{a+b} + \frac{a+b+c}{2c} - 1 = \frac{c}{a+b} + \frac{a+b}{2c} - \frac{1}{2} \geq$$

$$2\sqrt{\frac{c}{a+b} \cdot \frac{a+b}{2c}} - \frac{1}{2} = \sqrt{2} - \frac{1}{2}, \text{ 当且仅当}$$

$$b+c=a, \frac{c}{a+b} = \frac{a+b}{2c}, \text{ 即 } a = \frac{\sqrt{2}+1}{2}c, b =$$

$$\frac{\sqrt{2}-1}{2}c \text{ 时第二个不等号中的等号成立,}$$

$$\text{所以 } \frac{c}{a+b} + \frac{b}{c} \text{ 的最小值为 } \sqrt{2} - \frac{1}{2}.$$

**6. 【思路导引】** 直接将目标展开, 消

掉  $\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$  即得最小值和取等条件,

关于  $a$  的方程  $4bca^2 - \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)a - 1 =$

0 永远有根, 则  $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right) =$

$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \frac{1}{bc}$  是关于  $\frac{1}{a}$  的

二次函数, 结合二次函数性质讨论最值的情况.

**【解】** 因为  $4abc = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ ,

$$\text{所以 } \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 4abc - \frac{1}{a},$$

$$\text{所以 } \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right) = \frac{1}{a^2} +$$

$$\frac{1}{a}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \frac{1}{bc} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}\left(4abc -$$

$$\frac{1}{a}\right) + \frac{1}{bc} = 4bc + \frac{1}{bc} \geq 2\sqrt{4bc \cdot \frac{1}{bc}} = 4,$$

当且仅当  $bc = \frac{1}{2}$  时取等号.

$4abc = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ , 得关于  $a$  的方程

$$4bca^2 - \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)a - 1 = 0 \text{ ①},$$





$$\text{此时 } \Delta = \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2 + 16bc > 0,$$

即  $b, c$  为任意正值, 方程①都有解, 即都有满足题意的  $a$ .

将  $\left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a} \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + \frac{1}{bc}$  看成关于  $\frac{1}{a}$  的二次函数, 则无最大值, 所以  $\left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right)$  有最小值 4, 无最大值.

## 第二章 全章上分

**1. D** 【解析】因为集合  $A = \{x | x = 2k - 1, k \in \mathbf{Z}\} = \{\dots, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$ ,  $B = \{x | x^2 - 5x - 6 \leq 0\} = \{x | -1 \leq x \leq 6\}$ , 所以  $A \cap B = \{-1, 1, 3, 5\}$ . 故选 D.

**2. D** 【解析】对于 A, 当  $c = 0$  时,  $ac^2 = bc^2 = 0$ , 因此 A 不是真命题;

对于 B, 取  $a = 2, b = -1$ , 则  $a > b$ , 但是  $\frac{1}{a} >$

$\frac{1}{b}$ , 因此 B 不是真命题;

对于 C, 取  $a = -2, b = -1$ , 此时  $a < b < 0$ , 但是  $a^2 > ab > b^2$ , 因此 C 不是真命题;

对于 D, 若  $a < b < c < 0$ , 则  $\frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+c} =$

$\frac{c(a-b)}{b(b+c)} > 0$  恒成立, 即  $\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}$ , 因此 D 是真命题.

(另解: 若  $a < b < c < 0$ , 则  $-a > -b > -c > 0$ , 由

糖水不等式可得  $\frac{-a}{-b} > \frac{-a-c}{-b-c}$ , 即  $\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}$ )

提示: 若  $a > b > c > 0$ , 则  $\frac{b}{a} < \frac{b+c}{a+c}$ ,

$$\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}$$

故选 D.

**3. D**



思路导引

根据  $\frac{2}{a}$  是方程  $x^2 + bx - 8 = 0$  的一个根得到  $a$  和  $b$  的关系, 从而表示出  $b$ , 根据基本不等式求出  $b + \frac{6}{a}$  的最小值.

【解析】由  $\frac{2}{a}$  是方程  $x^2 + bx - 8 = 0$  的一个



根,可得  $\frac{4}{a^2} + \frac{2b}{a} - 8 = 0$ , 即  $b = 4a - \frac{2}{a}$ , 又

$a > 0$ , 所以  $b + \frac{6}{a} = 4a - \frac{2}{a} + \frac{6}{a} = 4a +$

$\frac{4}{a} \geq 2\sqrt{4a \cdot \frac{4}{a}} = 8$ , 当且仅当  $4a = \frac{4}{a}$ ,

即  $\begin{cases} a=1, \\ b=2 \end{cases}$  时, 等号成立, 即  $b + \frac{6}{a}$  的最小

值是 8. 故选 D.

**4. A** 【解析】由于天平的两臂不相等, 故可设天平左臂长为  $a (a > 0)$ , 右臂长为  $b (b > 0)$ , 所以  $\frac{a}{b} = \lambda (\lambda > 0 \text{ 且 } \lambda \neq 1)$ , 所以  $a = \lambda b$ .

设先称得的黄金的实际质量为  $m_1$  克, 后称得的黄金的实际质量为  $m_2$  克.

由杠杆的平衡原理得  $bm_1 = a \times 5, am_2 = b \times$

$5$ , 解得  $m_1 = \frac{5a}{b}, m_2 = \frac{5b}{a}$ , 则  $m_1 + m_2 =$

$\frac{5b}{a} + \frac{5a}{b}$ .

因为  $m_1 + m_2 - 10 = \frac{5b}{a} + \frac{5a}{b} - 10 =$

$\frac{5(b-a)^2}{ab} = \frac{5(b-\lambda b)^2}{\lambda b^2} = \frac{5(1-\lambda)^2}{\lambda}$ , 而  $\lambda > 0$

且  $\lambda \neq 1$ , 所以  $\frac{5(1-\lambda)^2}{\lambda} > 0$ , 即  $m_1 + m_2 >$

$10$ , 所以可知称出的黄金质量大于  $10$  克. 故选 A.

**5. B** 【解析】因为  $x + 2y = 3$ , 所以  $\frac{x^2 + 3y}{xy} =$

$\frac{x}{y} + \frac{3}{x} = \frac{x}{y} + \frac{x+2y}{x} = \frac{x}{y} + \frac{2y}{x} + 1$ . 因

为  $x > 0, y > 0$ , 所以  $\frac{x^2 + 3y}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{2y}{x} + 1 \geq$

$2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{2y}{x}} + 1 = 2\sqrt{2} + 1$ , 当且仅当  $y =$

$\frac{3(2-\sqrt{2})}{2}, x = 3(\sqrt{2}-1)$  时, 等号成立, 所

以  $\frac{x^2 + 3y}{xy}$  的最小值为  $2\sqrt{2} + 1$ . 故选 B.

**6. D** 【解析】由不等式  $2x^2 + mx - 3m^2 < 0$  可得  $(x-m)(2x+3m) < 0$ .

①当  $m = 0$  时, 不等式为  $2x^2 < 0$ , 此时不等式的解集为  $\emptyset$ , 不符合题意.

②当  $m > 0$  时, 不等式的解集为

$\left\{ x \mid -\frac{3}{2}m < x < m \right\}$ , 若不等式的解集中



恰好有 3 个整数,

则当这 3 个整数为  $-2, -1, 0$  时,

$$\begin{cases} -3 \leq -\frac{3}{2}m < -2, \\ 0 < m \leq 1, \end{cases} \text{此时 } m \text{ 无解;}$$

当这 3 个整数为  $-1, 0, 1$  时,

$$\begin{cases} 1 < m \leq 2, \\ -2 \leq -\frac{3}{2}m < -1, \end{cases} \text{解得 } 1 < m \leq \frac{4}{3}.$$

因为  $\left| -\frac{3}{2}m \right| > |m|$ , 所以这 3 个整数不会都大于等于 0, 所以此时  $m$  的取值范围为  $\left\{ m \mid 1 < m \leq \frac{4}{3} \right\}$ .

③ 当  $m < 0$  时, 不等式的解集为

$$\left\{ x \mid m < x < -\frac{3}{2}m \right\}, \text{若不等式的解集中}$$

恰好有 3 个整数,

则当这 3 个整数为  $-1, 0, 1$  时, 有

$$\begin{cases} 1 < -\frac{3}{2}m \leq 2, \\ -2 \leq m < -1, \end{cases} \text{解得 } -\frac{4}{3} \leq m < -1,$$

当这 3 个整数为  $0, 1, 2$  时, 有

$$\begin{cases} -1 \leq m < 0, \\ 2 < -\frac{3}{2}m \leq 3, \end{cases} \text{此时 } m \text{ 无解,}$$

因为  $\left| -\frac{3}{2}m \right| > |m|$ , 这 3 个整数不可能都小于等于 0, 所以此时  $m$  的取值范围为  $\left\{ m \mid -\frac{4}{3} \leq m < -1 \right\}$ .

综上所述, 实数  $m$  的取值范围为  $\left\{ m \mid -\frac{4}{3} \leq m < -1 \text{ 或 } 1 < m \leq \frac{4}{3} \right\}$ . 故选 D.

**7. BD** 【解析】对于 A, 由  $1 \leq a \leq 2, 3 \leq b \leq 5$ , 得  $6 \leq 2b \leq 10, 7 \leq a + 2b \leq 12$ , 故 A 错误;

对于 B, 由  $1 \leq a \leq 2$ , 得  $-4 \leq -2a \leq -2$ , 而  $3 \leq b \leq 5$ , 故  $-1 \leq b - 2a \leq 3$ , 故 B 正确;

对于 C, 由  $1 \leq a \leq 2, 3 \leq b \leq 5$ , 得  $1 \leq a^2 \leq 4$ , 故  $3 \leq a^2 b \leq 20$ , 故 C 错误;

对于 D, 由  $3 \leq b \leq 5$ , 得  $\frac{1}{5} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{3}$ , 而

$1 \leq a \leq 2$ , 则  $\frac{1}{5} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{2}{3}$ , 故 D 正确. 故

选 BD.



## 8. AC 【解析】原不等式等价于

$$\begin{cases} (x-2)(ax+b)(x-c) \geq 0, \\ x-c \neq 0, \end{cases} \quad \text{因为解集为}$$

$\{x | x \leq -2 \text{ 或 } 1 < x \leq 2\}$ , 所以  $a < 0$  且  $c = 1$ ,  $-2a + b = 0$ , 故 A 正确;

因为  $a < 0$ ,  $b = 2a < 0$ , 所以点  $(a, b)$  在第三象限, 故 B 错误;

$$2a + \frac{1}{b} = 2a + \frac{1}{2a} = -\left(-2a + \frac{1}{-2a}\right), \text{ 因为}$$

$$-2a + \frac{1}{-2a} \geq 2\sqrt{(-2a) \cdot \frac{1}{-2a}} = 2, \text{ 所以}$$

$$-\left(-2a + \frac{1}{-2a}\right) \leq -2, \text{ 当且仅当 } -2a =$$

$$\frac{1}{-2a}, \text{ 即 } a = -\frac{1}{2} \text{ 时取等号, 故 C 正确;}$$

$$\text{由 } ax^2 + ax - b \geq 0 \text{ 得 } ax^2 + ax - 2a \geq 0,$$

$$\text{即 } x^2 + x - 2 \leq 0, \text{ 解集为 } \{x | -2 \leq x \leq 1\},$$

故 D 错误. 故选 AC.

## 9. ABC



## 思路导引

根据解集以及根与系数的关系得到  $2m+n=1$  可判断 A, 根据基本不等式可判断 B, 根据和为 1 的形式可判断 C 和 D.

【解析】对于 A, 由不等式  $(2m+t)x^2 - (n-t)x - 1 < 0$  的解集为  $\left\{x \mid -1 < x < \frac{1}{3}\right\}$ , 可得

$2m+t > 0$ , 且方程  $(2m+t)x^2 - (n-t)x - 1 = 0$

的两根为  $-1$  和  $\frac{1}{3}$ , 所以

$$\begin{cases} -1 + \frac{1}{3} = \frac{n-t}{2m+t}, \\ -1 \times \frac{1}{3} = -\frac{1}{2m+t}, \end{cases} \quad \text{所以 } 2m+t=3, n-t=$$

$-2$ , 所以  $2m+n=1$ , 所以 A 正确;

对于 B, 因为  $m > 0, n > 0$ , 所以  $2m+n=1 \geq$

$2\sqrt{2mn}$ , 可得  $mn \leq \frac{1}{8}$ , 当且仅当  $2m =$

$n = \frac{1}{2}$  时, 等号成立, 所以  $mn$  的最大值为

$\frac{1}{8}$ , 所以 B 正确;

对于 C,  $\frac{1}{m} + \frac{m}{n} = \frac{2m+n}{m} + \frac{m}{n} = 2 + \frac{n}{m} +$

$\frac{m}{n} \geq 2 + 2\sqrt{\frac{n}{m} \cdot \frac{m}{n}} = 4$ , 当且仅当  $\frac{n}{m} =$

$\frac{m}{n}$ , 即  $m=n=\frac{1}{3}$  时, 等号成立, 所以  $\frac{1}{m} +$



$\frac{m}{n}$  的最小值为 4, 所以 C 正确;

对于 D, 由  $2m+n=1$  得  $2(m+1)+(n+2)=5$ , 则

$$\frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+2} = \frac{1}{5} \left( \frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+2} \right) [2(m+1)+(n+2)] = \frac{1}{5} \left[ 3 + \frac{n+2}{m+1} + \frac{2(m+1)}{n+2} \right] \geq \frac{1}{5} \left[ 3 + 2\sqrt{\frac{n+2}{m+1} \cdot \frac{2(m+1)}{n+2}} \right] = \frac{3+2\sqrt{2}}{5},$$

当且仅当  $\frac{n+2}{m+1} = \frac{2(m+1)}{n+2}$ , 即  $m = 4 - \frac{5\sqrt{2}}{2}$ ,  $n = 5\sqrt{2} - 7$  时, 等号成立, 所以  $\frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+2}$  的最小值为  $\frac{3+2\sqrt{2}}{5}$ , 所以 D 错误. 故选 ABC.

10.  $\left\{ 3x+2y \mid -\frac{3}{2} < 3x+2y < \frac{23}{2} \right\}$  【解析】设

$3x+2y = m(x+y) + n(x-y)$ , 则

$$\begin{cases} m+n=3, \\ m-n=2, \end{cases} \text{ 所以 } \begin{cases} m=\frac{5}{2}, \\ n=\frac{1}{2}, \end{cases} \text{ 即 } 3x+2y =$$

$$\frac{5}{2}(x+y) + \frac{1}{2}(x-y).$$

又因为  $-1 < x+y < 4$ ,  $2 < x-y < 3$ , 所以  $-\frac{5}{2} <$

$$\frac{5}{2}(x+y) < 10, 1 < \frac{1}{2}(x-y) < \frac{3}{2}, \text{ 所以}$$

$$-\frac{3}{2} < \frac{5}{2}(x+y) + \frac{1}{2}(x-y) < \frac{23}{2}, \text{ 即}$$

$$-\frac{3}{2} < 3x+2y < \frac{23}{2}.$$

11. 8 【解析】二次函数  $y=ax^2+4x+c$ , 其中

$a>c$ , 若函数的最小值为 0, 则  $\Delta=16-4ac=0$ , 即  $ac=4$ , 且  $a>c>0$ ,

所以  $2a-c>0$ ,

$$\text{所以 } \frac{4a^2+c^2}{2a-c} = \frac{(2a-c)^2+4ac}{2a-c} =$$

$$\frac{(2a-c)^2+16}{2a-c} = 2a-c + \frac{16}{2a-c} \geq$$

$$2\sqrt{(2a-c) \cdot \frac{16}{2a-c}} = 8,$$

当且仅当  $2a-c=4$ , 即  $a=1+\sqrt{3}$ ,  $c=2\sqrt{3}-2$  时, 等号成立.

12.  $\{m \mid m < 2\} \quad \left\{ b \mid b < -3 \text{ 或 } 5 < b < \frac{16}{3} \right\}$



【解析】因为  $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>$

$0$ , 不等式  $\frac{3x^2+2x+2}{x^2+x+1}>m$  对一切实数  $x$  均

成立, 所以不等式  $(3-m)x^2+(2-m)x+2-m>0$  对一切实数  $x$  均成立.

当  $3-m=0$ , 即  $m=3$  时, 不等式即  $-x-1>0$ , 解得  $x<-1$ , 显然不满足题意;

当  $3-m\neq 0$  时,

$$\text{则} \begin{cases} 3-m>0, \\ \Delta=(2-m)^2-4(3-m)(2-m)<0, \end{cases}$$

解得  $m<2$ , 即实数  $m$  的取值范围为  $\{m|m<2\}$ .

因为关于  $m$  的方程  $m^2+(3-b)m+6-b=0$  在  $m\in\{m|m<2\}$  时有两个不相等的

$$\text{实数解, 则} \begin{cases} \frac{b-3}{2}<2, \\ \Delta=(3-b)^2-4(6-b)>0, \\ 4+2(3-b)+6-b>0, \end{cases}$$

解得  $b<-3$  或  $5<b<\frac{16}{3}$ , 即实数  $b$  的取值

范围为  $\left\{b \mid b<-3 \text{ 或 } 5<b<\frac{16}{3}\right\}$ .

13. 【解】(1) 由题意得  $10(1\,000-x)(1+0.2x\%) \geq 10 \times 1\,000$ , 即  $x^2-500x \leq 0$ , 又  $x>0$ , 所以  $0<x \leq 500$ .

即最多调整出 500 名员工从事第三产业.

(2) 从事第三产业的员工创造的年总利润为  $10\left(a-\frac{3x}{500}\right)x$  万元, 从事原来产业的员工的年总利润为  $10(1\,000-x) \cdot (1+0.2x\%)$  万元, 则  $10\left(a-\frac{3x}{500}\right)x \leq$

$10(1\,000-x)\left(1+\frac{1}{500}x\right)$ , 所以  $ax -$

$\frac{3x^2}{500} \leq 1\,000 + 2x - x - \frac{1}{500}x^2$ , 所以  $ax \leq$

$\frac{2x^2}{500} + 1\,000 + x$ , 即  $a \leq \frac{2x}{500} + \frac{1\,000}{x} + 1$  恒

成立.

因为  $\frac{2x}{500} + \frac{1\,000}{x} \geq 2\sqrt{\frac{2x}{500} \cdot \frac{1\,000}{x}} = 4$ ,

当且仅当  $\frac{2x}{500} = \frac{1\,000}{x}$ , 即  $x=500$  时, 等

号成立, 所以  $a \leq 5$ .

又  $a>0$ , 所以  $0<a \leq 5$ , 即  $a$  的取值范围

为  $\{a|0<a \leq 5\}$ .



14. 【解】(1) 由  $\frac{5}{x-3} \geq -1$ , 得  $\frac{x+2}{x-3} \geq 0$ , 解得  $x \leq -2$  或  $x > 3$ , 所以  $A = \{x \mid x \leq -2 \text{ 或 } x > 3\}$ .

因为  $a = \frac{1}{2}, b = 8$ , 所以  $B = \{x \mid x^2 - 2x - 8 < 0\} = \{x \mid -2 < x < 4\}$ , 所以  $A \cup B = \mathbf{R}$ .

(2) 由  $t > 2$ , 得  $t - 2 > 0$ , 所以  $\frac{t^2+5}{t-2} = \frac{(t-2)^2+4(t-2)+9}{t-2} = (t-2) + \frac{9}{t-2} + 4 \geq 2\sqrt{(t-2) \cdot \frac{9}{t-2}} + 4 = 10$ , 当且仅当  $t = 5$  时取等号, 故  $b = 10$ .

$2ax^2 + (2-ab)x - b < 0$  即为  $ax^2 + (1-5a)x - 5 < 0$  且  $a > 0$ , 所以  $(ax+1)(x-5) < 0$ , 解得  $-\frac{1}{a} < x < 5$ , 故  $B = \left\{x \mid -\frac{1}{a} < x < 5\right\}$ .

(3) 由  $A \cap B = A$ , 得  $A \subseteq B$ .

因为  $2ax^2 + (2-ab)x - b < 0$ , 所以  $(ax+1)(2x-b) < 0$ .

当  $a = 0$  时, 化为  $2x - b < 0$ , 解得  $x < \frac{b}{2}$ , 此时不满足  $A \subseteq B$ , 舍去;

当  $a > 0$  时, 解得  $-\frac{1}{a} < x < \frac{b}{2}$  或  $\frac{b}{2} < x < -\frac{1}{a}$ , 此时不满足  $A \subseteq B$ , 舍去;

当  $a < 0$  时, 解得  $x < \frac{b}{2}$  或  $x > -\frac{1}{a}$ ,

因为  $A \subseteq B$ , 所以  $\begin{cases} -2 < \frac{b}{2} < 0, \\ 0 < -\frac{1}{a} \leq 3, \end{cases}$  解得  $a \leq$

$-\frac{1}{3}, -4 < b < 0$ . 所以  $a, b$  的取值范围分

别是  $\left\{a \mid a \leq -\frac{1}{3}\right\}, \{b \mid -4 < b < 0\}$ .

15.



思路导引

(1) 由  $2x^2 + 5xy + 2y^2 = 2x + y$  得  $(2x+y)(x+2y) = 2x+y$ , 由  $x, y$  为正实数得  $x+2y=1$ ; (2) 由  $x+2y=1$  得  $3x+1+6y=4$ , 利用基本不等式求最值即可; (3) 由  $x+2y=1$  得  $\frac{yz}{x} + \frac{z}{xy} + \frac{\sqrt{5}}{z-1} - 4z = z \left[ \frac{y}{x} + \frac{(x+2y)^2}{xy} - 4 \right] + \frac{\sqrt{5}}{z-1}$ , 化简之后结合基本不等式求最值即可.

【解】(1) 因为  $2x^2 + 5xy + 2y^2 = 2x + y$ , 所



以  $(2x+y)(x+2y) = 2x+y$ .

因为  $x, y$  为正实数, 所以  $2x+y > 0$ , 所以  $x+2y = 1$ .

(2) 因为  $x+2y = 1$ , 所以  $3x+1+6y = 4$ ,

$$\begin{aligned} \text{所以 } \frac{3}{3x+1} + \frac{2}{y} &= \frac{3}{3x+1} + \frac{12}{6y} \\ &= \frac{1}{4}(3x+1+6y) \left( \frac{3}{3x+1} + \frac{12}{6y} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left[ 15 + \frac{18y}{3x+1} + \frac{12(3x+1)}{6y} \right] \\ &\geq \frac{1}{4} \left[ 15 + 2\sqrt{\frac{18y}{3x+1} \cdot \frac{12(3x+1)}{6y}} \right] \\ &= \frac{27}{4}, \end{aligned}$$

$$\text{当且仅当 } \begin{cases} \frac{18y}{3x+1} = \frac{12(3x+1)}{6y}, \\ x+2y = 1, \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} x = \frac{1}{9}, \\ y = \frac{4}{9} \end{cases} \text{ 时, 等号成立,}$$

所以  $\frac{3}{3x+1} + \frac{2}{y}$  的最小值为  $\frac{27}{4}$ .

(3) 因为  $x+2y = 1$ ,

$$\begin{aligned} \text{所以 } \frac{yz}{x} + \frac{z}{xy} + \frac{\sqrt{5}}{z-1} - 4z &= z \left( \frac{y}{x} + \frac{1}{xy} - 4 \right) + \frac{\sqrt{5}}{z-1} \\ &= z \left[ \frac{y}{x} + \frac{(x+2y)^2}{xy} - 4 \right] + \frac{\sqrt{5}}{z-1} \\ &= z \left( \frac{5y}{x} + \frac{x}{y} \right) + \frac{\sqrt{5}}{z-1} \\ &\geq z \cdot 2\sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{z-1} \\ &= 2\sqrt{5} \cdot (z-1) + \frac{\sqrt{5}}{z-1} + 2\sqrt{5} \\ &\geq 2\sqrt{2\sqrt{5}(z-1) \cdot \frac{\sqrt{5}}{z-1}} + 2\sqrt{5} \\ &= 2\sqrt{10} + 2\sqrt{5}, \end{aligned}$$

$$\text{当且仅当 } \begin{cases} x+2y = 1, \\ \frac{x}{y} = \frac{5y}{x}, \\ 2\sqrt{5}(z-1) = \frac{\sqrt{5}}{z-1}, \end{cases}$$





$$\text{即} \begin{cases} x=5-2\sqrt{5}, \\ y=\sqrt{5}-2, \\ z=\frac{\sqrt{2}}{2}+1 \end{cases} \text{时, 等号成立,}$$

故  $\frac{yz}{x} + \frac{z}{xy} + \frac{\sqrt{5}}{z-1} - 4z$  的最小值为  $2\sqrt{10}+2\sqrt{5}$ .